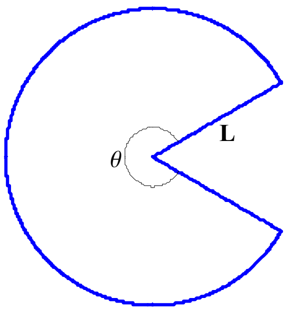
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 27 de Enero de 2001

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Al pegar los bordes rectos de un sector circular de radio L y ángulo central θ (veáse figura) se forma la superficie lateral de un cono. Encontrar el valor de θ para el cual el volumen de dicho cono resulta máximo.



Solución. El volumen del cono, cuya base es un círculo de radio r y cuya altura es h, viene dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. La construcción del cono implica que $h = \sqrt{L^2 - r^2}$. Además, la longitud del borde circular del sector es θL, y coincide con la longitud de la circunferencia base, cuyo radio es r, del cono. Es decir, $2\pi r = \theta L$, lo que implica

$$r = \frac{\theta L}{2\pi} \Longrightarrow h^2 = L^2 - \frac{\theta^2 L^2}{4\pi^2} = L^2\left(1 - \frac{\theta^2}{4\pi^2}\right).$$

El volumen del cono, en función del ángulo θ, es

$$V(\theta) = \frac{\pi\theta^2 L^3}{12\pi^2}\sqrt{1 - \frac{\theta^2}{4\pi^2}} = \frac{L^3}{12\pi}\sqrt{\theta^4 - \frac{\theta^6}{4\pi^2}}.$$

Calculamos la derivada en el intervalo abierto $(0, 2\pi)$,

$$V'(\theta) = \frac{L^3}{12\pi}\frac{\left(4\theta^3 - \frac{6\theta^5}{4\pi^2}\right)}{2\sqrt{\theta^4 - \frac{\theta^6}{4\pi^2}}}.$$

Si $V'(\theta) = 0$, entonces

$$4\theta^3 - \frac{3\theta^5}{2\pi^2} = 0 \Longleftrightarrow 4\theta^3 = \frac{3\theta^5}{2\pi^2} \Longleftrightarrow \frac{8\pi^2}{3} = \theta^2,$$

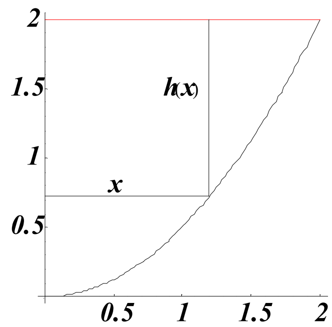
luego el *único* punto crítico en el intervalo $(0, 2\pi)$ es

$$\theta^* = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi = \frac{2\pi}{3}\sqrt{6}.$$

Observemos que $V(0) = V(2\pi) = 0$, siendo $V(\theta) > 0$ en el intervalo $(0, 2\pi)$. Por ello, $V(\theta^*)$ es el único máximo absoluto de $V(\theta)$ en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$.

Ejercicio 2. Sea un sólido generado haciendo girar la región acotada por la curva $y = x^2/2$, y la recta $y = 2$, alrededor del eje OY. Se desea perforar un orificio circular, centrado en el eje de revolución, de manera tal que dicho sólido pierda un cuarto de su volumen. Calcular el diámetro que debe tener dicho orificio.

Solución. La región es $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, \quad x^2/2 \le y \le 2\}$.



Usando el método de las capas, el volumen del solido sin perforar es

$$V = 2\pi \int_0^2 x\, h(x)\; dx,$$

donde $h(x) = 2 - x^2/2$. Entonces, el volumen es

$$V = 2\pi \int_0^2 x \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \pi \int_0^2 \left(4x - x^3\right) dx = \pi \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4\pi.$$

Sabemos que al ser perforado, el sólido pierde un cuarto de su volumen, es decir π. En consecuencia, el volumen V' del sólido perforado es 3π. La región que genera este sólido es $A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r \le x \le 2, \quad x^2/2 \le y \le 2\}$. Por tanto el volumen V', usando el método de las capas, es

$$V'(r) = \pi \int_r^2 \left(4x - x^3\right) dx = \pi \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_r^2 = \pi \left(4 - 2r^2 + \frac{r^4}{4}\right),$$

donde $0 \le r \le 2$. Para calcular el radio r del orificio, debemos resolver la ecuación

$$\pi \left(4 - 2r^2 + \frac{r^4}{4}\right) = 3\pi \iff r^4 - 8r^2 + 4 = 0.$$

Si elegimos $s = r^2$, obtenemos $s^2 - 8s + 4 = 0$, con $0 \le s \le 4$. Sus raíces son

$$s = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{3}.$$

Dado que $4 + 2\sqrt{3} > 4$, tenemos que $s = 4 - 2\sqrt{3}$, por lo que el radio del orificio es $r = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ y su diámetro es $d = 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

Ejercicio 3. Sean **A** y **B** los puntos donde se cortan las curvas $y^2 = 2x^3$, $x^2+y^2 = 20$. Calcular la longitud de la curva cerrada **OABO** formada con los correspondientes trozos de las curvas anteriores, siendo **O** el origen de coordenadas.

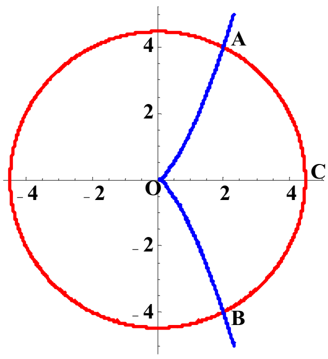
Solución. Las ecuaciones de las curvas son $x^2 + y^2 = 20$, $y^2 = 2x^3$, por lo que los puntos que pertenecen a las dos curvas verifican la ecuación $x^2 + 2x^3 = 20$, que es equivalente a $2x^3 + x^2 - 20 = 0$. Buscamos soluciones enteras y comprobamos que

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & 0 & -20 \\ 2 & & 4 & 10 & 20 \\ \hline & 2 & 5 & 10 & 0 \end{array}$$

Entonces, $x = 2$ es una solución de la ecuación y además

$$2x^3 + x^2 - 20 = (x-2)\left(2x^2 + 5x + 10\right) = 0.$$

El discriminante de la ecuación de segundo grado es $b^2 - 4ac = 25 - 80 < 0$, luego no tiene soluciones reales y la única solución real de la ecuación de tercer grado es $x = 2$. Esta solución implica que $y^2 = 16$, por lo que $y = \pm 4$, siendo $\mathbf{A} = (2, 4)$ y $\mathbf{B} = (2, -4)$ los puntos donde se cortan las curvas. Para utilizar la simetría de las curvas, vamos a considerar el punto $\mathbf{C} = \left(\sqrt{20}, 0\right)$, que es la intersección de la circunferencia con el eje x.



La longitud de la curva cerrada es

$$l(\mathbf{OABO}) = 2l(\mathbf{OAC}) = 2\left(l(\mathbf{OA}) + l(\mathbf{AC})\right).$$

Las longitudes de las curvas vienen dadas por

$$l(\mathbf{OA}) = \int_0^2 \sqrt{1 + (y_1')^2}\, dx,$$

$$l(\mathbf{AC}) = \int_2^{\sqrt{20}} \sqrt{1 + (y_2')^2}\, dx,$$

donde $y_1^2 = 2x^3$, $x^2 + y_2^2 = 20$. Derivando de forma implícita, obtenemos

$$2y_1 y_1' = 6x^2 \Longrightarrow (y_1')^2 = \left(\frac{3x^2}{y_1}\right)^2 = \frac{9x^4}{2x^3} = \frac{9}{2}x,$$

$$2x + 2y_2 y_2' = 0 \quad \Longrightarrow (y_2')^2 = \left(\frac{-x}{y_2}\right)^2 = \frac{x^2}{20 - x^2}.$$

A continuación, calculamos las integrales

$$
\begin{aligned}
l\,(\mathbf{OA}) &= \int_0^2 \sqrt{1+\frac{9}{2}x}\,dx = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(1+\frac{9}{2}x\right)^{3/2}\right]_0^2 \\
&= \frac{4}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l\,(\mathbf{AC}) &= \int_2^{\sqrt{20}} \sqrt{1+\frac{x^2}{20-x^2}}\,dx = \int_2^{\sqrt{20}} \sqrt{\frac{20}{20-x^2}}\,dx \\
&= \int_2^{\sqrt{20}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{20}}\right)^2}}\,dx = \sqrt{20}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{20}}\right)\right]_2^{\sqrt{20}} \\
&= 2\sqrt{5}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}\right).
\end{aligned}
$$

En conclusión, la longitud de la curva cerrada es

$$
l\,(\mathbf{OABO}) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right) + 4\sqrt{5}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}\right).
$$

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Primer Examen Parcial. 27 de Enero de 2001
SEGUNDA PARTE

Ejercicio 4.
Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{7x+3}{x^a\,(1+x^3)}\,dx,$$

según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

Solución. Consideramos las integrales impropias

$$I_1 = \int_0^1 \frac{7x+3}{x^a\,(1+x^3)}\,dx, \quad I_2 = \int_1^\infty \frac{7x+3}{x^a\,(1+x^3)}\,dx.$$

Para analizar la convergencia de I_1, calculamos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{7x+3}{x^a\,(1+x^3)}}{\dfrac{1}{x^p}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^p\,(7x+3)}{x^a\,(1+x^3)} = 3,$$

si $p = a$. Entonces, el carácter de I_1 es el mismo que la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx.$$

Dado que esta última integral converge si y sólo si $-a > -1 \Leftrightarrow a < 1$, tenemos que I_1 converge si y sólo si $a < 1$.

Para analizar la convergencia de I_2, calculamos

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\dfrac{7x+3}{x^a\,(1+x^3)}}{\dfrac{1}{x^p}} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^p\,(7x+3)}{x^a\,(1+x^3)} = \lim_{x\to \infty} \frac{7x^{p+1}+3x^p}{x^{a+3}+x^a} = 7,$$

si $p+1 = a+3$, es decir $p = a+2$. En consecuencia, el carácter de I_2 es el mismo que la integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{a+2}}\,dx,$$

que converge si y sólo si $a+2 > 1 \Leftrightarrow a > -1$.

Entonces, la integral converge si y sólo si $-1 < a < 1$.

Ejercicio 5. Determinar los valores reales de x que hacen que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n$ sea convergente y hallar su suma en dichos puntos. Aplicar el método de Newton, con $x_0 = 0$, para aproximar la solución de la ecuación $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n = 2$.

Solución. El radio de convergencia de la serie de potencias es

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+4} = 1.$$

En los extremos $x = \pm 1$, no se cumple la condición necesaria de convergencia de series porque $\lim_{n\to\infty}|a_n x^n| = \lim_{n\to\infty}(n+1)^2 = \infty$. Entonces, el intervalo de convergencia es $(-1,1)$.

Para calcular la suma de la serie en los puntos $|x| < 1$, sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

para $|x| < 1$. Entonces, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Derivando de nuevo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

para $|x| < 1$. En consecuencia, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Aplicamos el *método de Newton* a la ecuación $2(1-x)^3 = 1 + x$, equivalente a $f(x) = 0$, para $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 1$. A partir del punto $x_0 = 0$, la iteración

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

donde $n \geq 1$, nos proporciona las siguientes soluciones aproximadas:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.1428571429,\\
x_2 &= 0.1644204852,\\
x_3 &= 0.1648774497,\\
x_4 &= 0.1648776515,\\
x_5 &= 0.1648776515.
\end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 13 de Junio de 2001

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Obtener la expresión en que se transforma $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}$, al cambiar las variables independientes (x, y) por (u, v) y la función z por w, considerando que unas y otras están relacionadas por

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}, \quad z = \frac{u^2-v^2}{4} - w.$$

Solución. En primer lugar, obtenemos $u = x + y, \quad v = x - y$. A continuación, calculamos

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = z_u + z_v,$$
$$z_y = z_u u_y + z_v v_y = z_u - z_v.$$

Usando estos resultados, obtenemos

$$\begin{aligned}
(z_x)_x &= (z_x)_u u_x + (z_x)_v v_x = z_{uu} + z_{vu} + z_{uv} + z_{vv}, \\
(z_x)_y &= (z_x)_u u_y + (z_x)_v v_y = z_{uu} + z_{vu} - (z_{uv} + z_{vv}), \\
(z_y)_y &= (z_y)_u u_y + (z_y)_v v_y = z_{uu} - z_{vu} - (z_{uv} - z_{vv}).
\end{aligned}$$

Suponiendo que las derivadas cruzadas coincidan, tenemos que

$$z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 4z_{uu}.$$

Finalmente,

$$z_u = \frac{2u}{4} - w_u \ \text{ y además } \ z_{uu} = \frac{1}{2} - w_{uu}.$$

Entonces, la expresión transformada es $2 - 4w_{uu}$.

Ejercicio 2. De entre todos los planos que contienen al punto (a, b, c) situado en el octante positivo, determinar el que hace mínimo el volumen del tetraedro que forma con los planos coordenados.

Solución. Consideremos el tetraedro cuyos vértices son $(0,0,0)$, $(\alpha,0,0)$, $(0,\beta,0)$ y $(0,0,\gamma)$. Calculamos su volumen integrando el área de las secciones, que son triángulos de vértices $(x,0,z)$, $(0,y,z)$, $(0,0,z)$, donde $0 \le z \le \gamma$. Es decir,

$$V = \int_0^\gamma A(z)\, dz, \quad \text{donde } A(z) = \frac{1}{2}xy.$$

Sabemos que el vértice $(x,0,z)$ es un punto de la recta contenida en el plano $y=0$, que pasa por $(\alpha,0,0)$ y $(0,0,\gamma)$. La ecuación de esta recta es $x-\alpha = \left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right) z$, es decir $x = \alpha - \frac{\alpha}{\gamma} z$. El vértice $(0,y,z)$ pertenece a la recta contenida en el plano $x=0$, que pasa por $(0,\beta,0)$ y $(0,0,\gamma)$. Su ecuación es $y-\beta = \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right) z$, es decir $y = \beta - \frac{\beta}{\gamma} z$. Entonces,

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\alpha}{\gamma} z\right)\left(\beta - \frac{\beta}{\gamma} z\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha\beta - 2\frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} z^2\right) \\ &= \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha\beta}{2\gamma^2} z^2. \end{aligned}$$

El volumen del tetraedro es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\gamma \left(\frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha\beta}{2\gamma^2} z^2\right) dz = \left[\frac{\alpha\beta}{2} z - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{z^2}{2} + \frac{\alpha\beta}{2\gamma^2}\frac{z^3}{3}\right]_0^\gamma \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma}{2} - \frac{\alpha\beta\gamma}{2} + \frac{\alpha\beta\gamma}{6} = \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

Si $Ax + By + Cz + D = 0$ es la ecuación del plano no coordenado que contiene a los vértices $(\alpha,0,0)$, $(0,\beta,0)$ y $(0,0,\gamma)$, tenemos que

$$A\alpha + D = 0, \quad B\beta + D = 0, \quad C\gamma + D = 0.$$

Estas ecuaciones implican que $A = -\frac{D}{\alpha}$, $B = -\frac{D}{\beta}$, $C = -\frac{D}{\gamma}$, por lo que la ecuación del plano es

$$-\frac{D}{\alpha} x - \frac{D}{\beta} y - \frac{D}{\gamma} z + D = 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - 1 = 0.$$

En consecuencia, debemos resolver min $\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$, entre los planos con vértices en los puntos $(\alpha,0,0)$, $(0,\beta,0)$, $(0,0,\gamma)$ y que contienen al punto (a,b,c). Es decir, obtener el mínimo de $f(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$ sujeto a la restricción

$$g(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}-1=0.$$

Usando multiplicadores de Lagrange, tenemos que $\nabla f=\lambda\nabla g$ implica

$$\frac{1}{6}\beta\gamma=-\lambda\frac{a}{\alpha^2},\quad \frac{1}{6}\alpha\gamma=-\lambda\frac{b}{\beta^2},\quad \frac{1}{6}\alpha\beta=-\lambda\frac{c}{\gamma^2}.$$

A partir de ellas, obtenemos

$$\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma=-\lambda\frac{a}{\alpha},\quad \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma=-\lambda\frac{b}{\beta},\quad \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma=-\lambda\frac{c}{\gamma}. \tag{1}$$

Sumando las tres ecuaciones y usando que $g(\alpha,\beta,\gamma)=0$,

$$\frac{1}{2}\alpha\beta\gamma=-\lambda\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)=-\lambda.$$

Si sustituimos el valor de λ en las ecuaciones (1) tenemos que

$$\alpha=3a,\quad \beta=3b,\quad \gamma=3c.$$

El plano que hace mínimo el volumen es el que contiene a los puntos $(3a,0,0)$, $(0,3b,0)$ y $(0,0,3c)$, cuya ecuación es

$$\frac{x}{3a}+\frac{y}{3b}+\frac{z}{3c}=1\Longleftrightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3.$$

El volumen mínimo es $V=\dfrac{1}{6}(3a)(3b)(3c)=\dfrac{9}{2}abc.$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 13 de Junio de 2001

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Sea S el trozo del cono $x^2 = y^2 + z^2$, interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y situado en el octante positivo $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Calcular el área de S.

Solución.

(A) Usando *coordenadas cilíndricas* $x = r\cos t,\ \ y = r\,\mathrm{sen}\,t$, tenemos que

$$z = \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{r^2\cos^2 t - r^2\,\mathrm{sen}^2\,t} = r\sqrt{\cos 2t},$$

donde $\cos 2t \geq 0$, $\cos t \geq 0$ y $\mathrm{sen}\,t \geq 0$ implican que $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{4}$. Además, el trozo de cono es interior al cilindro, por lo que $r^2\cos^2 t + r^2\,\mathrm{sen}^2\,t \leq a^2$, es decir, $r \leq a$. Entonces, la parametrización de S es

$$S(r,t) = \left(r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t, r\sqrt{\cos 2t}\right),\quad 0 \leq r \leq a,\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

Obtenemos un vector paralelo al vector normal a la superficie mediante

$$\begin{aligned}
S_r \times S_t &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t & \mathrm{sen}\,t & \sqrt{\cos 2t} \\ -r\,\mathrm{sen}\,t & r\cos t & -\dfrac{r\,\mathrm{sen}\,2t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{vmatrix} \\
&= \left(-\frac{r\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{sen}\,2t}{\sqrt{\cos 2t}} - r\cos t\sqrt{\cos 2t}, \frac{r\cos t\,\mathrm{sen}\,2t}{\sqrt{\cos 2t}} - r\,\mathrm{sen}\,t\sqrt{\cos 2t}, r\right) \\
&= \left(\frac{-r\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{sen}\,2t - r\cos t\cos 2t}{\sqrt{\cos 2t}}, \frac{r\cos t\,\mathrm{sen}\,2t - r\,\mathrm{sen}\,t\cos 2t}{\sqrt{\cos 2t}}, r\right) \\
&= \left(\frac{-r\cos t\left[2\,\mathrm{sen}^2\,t + \cos 2t\right]}{\sqrt{\cos 2t}}, \frac{r\,\mathrm{sen}\,t\left[2\cos^2 t - \cos 2t\right]}{\sqrt{\cos 2t}}, r\right) \\
&= \left(\frac{-r\cos t}{\sqrt{\cos 2t}}, \frac{r\,\mathrm{sen}\,t}{\sqrt{\cos 2t}}, r\right).
\end{aligned}$$

A continuación, calculamos

$$\|S_r \times S_t\|^2 = \frac{r^2}{\cos 2t} + r^2 = r^2\left(\frac{1+\cos 2t}{\cos 2t}\right).$$

Entonces, el área de S es

$$\begin{aligned}
\acute{a}rea\,(S) &= \int_0^{\pi/4}\int_0^a \|S_r \times S_t\|\,dr\,dt = \int_0^{\pi/4}\int_0^a r\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{\cos 2t}}\,dr\,dt \\
&= \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a \int_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{\cos 2t}}\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{\cos 2t}}\,dt.
\end{aligned}$$

Dado que $1+\cos 2t = 2\cos^2 t$ y $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t$, la integral

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{\cos 2t}}\, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{1-2\operatorname{sen}^2 t}}\, dt = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = [\operatorname{arcsen} u]_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

donde $u = \sqrt{2}\operatorname{sen} t$. En consecuencia, $\acute{a}rea\,(S) = \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi a^2}{4}$.

(B) Usando *coordenadas cartesianas* (y, z), tenemos que $x = \sqrt{y^2+z^2}$. La superficie S es interior al cilindro, por lo que $x^2 + y^2 = 2y^2 + z^2 \leq a^2$. Entonces, la parametrización de S es

$$S\,(y,z) = \left(\sqrt{y^2+z^2}, y, z\right), \quad (y,z) \in D,$$

donde $D = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 2y^2 + z^2 \leq a^2, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\right\}$. A partir de la ecuación $x^2 = y^2 + z^2$, obtenemos $2xx_y = 2y, \quad 2xx_z = 2z$, lo que implica

$$x_y = \frac{y}{x}, \quad x_z = \frac{z}{x}.$$

El area de la superficie es

$$\begin{aligned}\acute{a}rea\,(S) &= \iint\limits_D \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\, dy\, dz = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{y^2+z^2}{x^2}}\, dy\, dz \\ &= \iint\limits_D \sqrt{2}\, dy\, dz,\end{aligned}$$

porque $y^2 + z^2 = x^2$. Observemos que

$$2y^2 + z^2 \leq a^2 \Longleftrightarrow \frac{y^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{x^2}{a^2} \leq 1.$$

Entonces, $\iint_D dy\, dz$ es el área de la cuarta parte $(y \geq 0,\ z \geq 0)$ de la región encerrada por una elipse de semiejes $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ y a. Dicha área es $\dfrac{\pi a^2}{4\sqrt{2}}$, por lo que

$$\acute{a}rea\,(S) = \sqrt{2}\frac{\pi a^2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Ejercicio 4. Sea F el campo vectorial $F(x,y,z) = (x^2, xy, xz)$ y sea S la superficie del ejercicio anterior. Calcular la integral $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}\, dS$, con la normal exterior al cono, directamente y usando el teorema de Stokes.

Solución. En primer lugar, calculamos el rotacional del campo F,

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ x^2 & xy & xz \end{vmatrix} = (0, -z, y).$$

(A) Usando *coordenadas cilíndricas*, la parametrización de S es

$$S(r,t) = \left(r\cos t, r \operatorname{sen} t, r\sqrt{\cos 2t}\right), \quad 0 \le r \le a, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4},$$

$$S_r \times S_t = \left(\frac{-r\cos t}{\sqrt{\cos 2t}}, \frac{r \operatorname{sen} t}{\sqrt{\cos 2t}}, r\right).$$

Dado que en el punto $S(a,0) = (a,0,a)$, el vector $S_r \times S_t (a,0) = (-a,0,a)$ apunta hacia el exterior del cono, tenemos que la normal exterior a S tiene el mismo sentido que $S_r \times S_t$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}\, dS &= (\operatorname{rot} F)(S(r,t)) \cdot (S_r \times S_t)\, dr\, dt \\ &= \left(0, -r\sqrt{\cos 2t}, r \operatorname{sen} t\right) \cdot (S_r \times S_t)\, dr\, dt \\ &= \left(-r^2 \operatorname{sen} t + r^2 \operatorname{sen} t\right) dr\, dt = 0. \end{aligned}$$

La integral pedida es

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}\, dS = 0.$$

El teorema de Stokes asegura que

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C F \cdot dr,$$

donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es la curva frontera de S. La parametrización de C_1 es

$$r_1(t) = S(a,t) = \left(a\cos t, a \operatorname{sen} t, a\sqrt{\cos 2t}\right), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}.$$

Como $r_1(0) = (a,0,a)$ y $r_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$, la orientación inducida por la normal exterior al cono coincide con la orientación de C_1. Dado que

$$F[r_1(t)] = \left(a^2\cos^2 t, a^2 \operatorname{sen} t \cos t, a^2 \cos t\sqrt{\cos 2t}\right),$$

$$r_1'(t) = \left(-a \operatorname{sen} t, a\cos t, -\frac{a \operatorname{sen} 2t}{\sqrt{\cos 2t}}\right),$$

su producto escalar es

$$\begin{aligned}F\left[r_1(t)\right]\cdot r_1'(t) &= -a^3\operatorname{sen} t\cos^2 t + a^3\operatorname{sen} t\cos^2 t - a^3\operatorname{sen} 2t\cos t\\ &= -2a^3\operatorname{sen} t\cos^2 t.\end{aligned}$$

Calculamos la integral de línea

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} F\left[r_1(t)\right]\cdot r_1'(t)\,dt &= 2a^3\int_0^{\pi/4}\cos^2 t\,(-\operatorname{sen} t)\,dt = 2a^3\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/4}\\ &= \frac{2a^3}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-1\right) = a^3\left(\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

La curva C_2 es la intersección de S con el plano $z=0$, es decir el segmento de la recta $y=x$ que une los puntos $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},0\right)$ y $(0,0,0)$. Una parametrización de C_2 es

$$r_2(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}-t,\frac{a}{\sqrt{2}}-t,0\right),\quad 0\le t\le\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

La integral de línea es

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} F\left[r_2(t)\right]\cdot r_2'(t)\,dt &= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} -2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-t\right)^2 dt = 2\left[\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-t\right)^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\\ &= -\frac{2}{3}\frac{a^3}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}a^3}{6}.\end{aligned}$$

La curva C_3 es la intersección de S con el plano $y=0$, es decir el segmento de la recta $z=x$ que une los puntos $(0,0,0)$ y $(a,0,a)$. Una parametrización de C_3 es $r_3(t)=(t,0,t)$, $0\le t\le a$, y la integral de línea es

$$\int_0^a F\left[r_3(t)\right]\cdot r_3'(t)\,dt = \int_0^a 2t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^a = \frac{2a^3}{3}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\oint_C F\cdot dr &= \int_{C_1} F\cdot dr + \int_{C_2} F\cdot dr + \int_{C_3} F\cdot dr\\ &= a^3\left(\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{2}{3}\right) - \frac{\sqrt{2}a^3}{6} + \frac{2a^3}{3} = 0.\end{aligned}$$

(B) Usando *coordenadas cartesianas* (y,z), la parametrización de S es

$$S(y,z) = \left(\sqrt{y^2+z^2}, y, z\right), \quad (y,z) \in D,$$

donde $D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 2y^2+z^2 \leq a^2, \ \ y \geq 0, \ \ z \geq 0\}$. Calculamos el producto vectorial

$$S_y \times S_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(1, \frac{-y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{-z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right).$$

En el punto $S(0,a) = (a,0,a)$, el vector $S_y \times S_z(0,a) = (1,0,-1)$ apunta hacia el interior del cono. Entonces,

$$\operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}\, dS = (0,-z,y) \cdot \left(-1, \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right) dy\, dz = 0,$$

por lo que

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}\, dS = 0.$$

Para usar el teorema de Stokes, debemos calcular

$$\oint_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr,$$

donde las curvas C_1, C_2 y C_3 se han analizado previamente. Dado que las integrales de línea sobre las curvas C_2 y C_3 se pueden calcular de manera análoga al caso **(A)**, vamos a parametrizar la curva C_1. Sabemos que los puntos de C_1 verifican las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2y^2+z^2 &= a^2, \\ y^2+z^2 &= x^2. \end{aligned}$$

Entonces $z^2 = a^2 - 2y^2, \ \ x^2 = a^2 - y^2$, por lo que

$$r_1(y) = \left(\sqrt{a^2-y^2}, y, \sqrt{a^2-2y^2}\right), \quad 0 \leq y \leq \frac{a}{\sqrt{2}},$$

es una parametrización de la curva C_1. Como $r_1(0) = (a,0,a)$ tenemos que su orientación es la inducida por la normal exterior al cono. A continuación, calculamos

$$\begin{aligned} F[r_1(y)] &= \left(a^2-y^2, y\sqrt{a^2-y^2}, \sqrt{a^2-y^2}\sqrt{a^2-2y^2}\right), \\ r_1'(y) &= \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}}, 1, \frac{-2y}{\sqrt{a^2-2y^2}}\right). \end{aligned}$$

Su producto escalar es

$$
\begin{aligned}
F\left[r_1(y)\right] \cdot r_1'(y) &= -y\sqrt{a^2-y^2} + y\sqrt{a^2-y^2} - 2y\sqrt{a^2-y^2} \\
&= -2y\left(a^2-y^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

La integral de línea es

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} F \cdot dr &= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} -2y\left(a^2-y^2\right)^{1/2} dy = \frac{2}{3}\left[\left(a^2-y^2\right)^{3/2}\right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{2}{3}\left[\left(\frac{a^2}{2}\right)^{3/2} - a^3\right] = \frac{2a^3}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1\right) = a^3\left(\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{2}{3}\right).
\end{aligned}
$$

◀ ○ ▶ ◀ ○ ▶ ◀ ○ ▶ ◀ ○ ▶ ◀ ○ ▶ ◀ ○ ▶

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen Final. 7 de Julio de 2000
PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Entre todos los rectángulos del plano YOZ, inscritos en la parábola $z = a^2 - y^2$ (siendo $a > 0$) y con base en el eje OY (ver figura 1, en la página 2), calcular el que tiene área máxima. Justificar la respuesta. Para cada valor $x_0 \in [0,1]$, consideremos la parábola del tipo anterior contenida en el plano $x = x_0$ y cuyo vértice está en el segmento que une los puntos $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$. Construimos el sólido cuya sección con cada plano $x = x_0$ es el rectángulo de área máxima inscrito en la parábola considerada en dicho plano (ver figura 2, en la página 2). Calcular el volumen de dicho sólido.

Solución. El área del rectángulo, inscrito en la parábola $z = a^2 - y^2$, es

$$A(y) = 2y\left(a^2 - y^2\right) = 2a^2y - 2y^3, \quad 0 \leq y \leq a.$$

Los puntos interiores, candidatos a extremos, verifican

$$0 = A'(y) = 2a^2 - 6y^2 = 2\left(a^2 - 3y^2\right) \Longleftrightarrow y = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Evaluamos el área en el punto crítico y en los puntos $y = 0,\ y = a$, obteniendo

$$A\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2a^3}{\sqrt{3}} - \frac{2a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{4a^3}{3\sqrt{3}} > A(0) = A(a) = 0.$$

Entonces, el área máxima se alcanza en $y = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, siendo $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}$, donde a^2 es la distancia del origen al vértice de la parábola.

A continuación, calculamos el volumen, integrando el área $A(x)$ de cada sección en el intervalo $[0,1]$. Dado que el vértice de cada parábola está en el segmento $x + z = 1,\ 0 \leq x \leq 1$, la distancia del plano $z = 0$ al vértice es $z = 1 - x$. Usando el resultado anterior, el área máxima es

$$A(x) = \frac{4}{3\sqrt{3}}(1-x)^{\frac{3}{2}}.$$

En consecuencia, el volumen pedido es

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \frac{4}{3\sqrt{3}}(1-x)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{4}{3\sqrt{3}}\left[-\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{8}{15\sqrt{3}}.$$

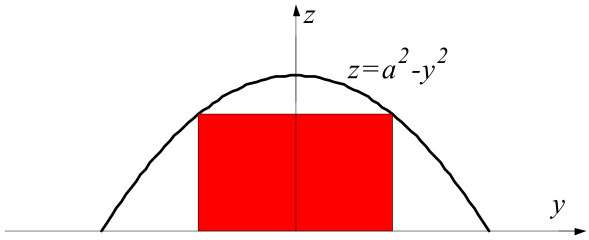


Figura 1

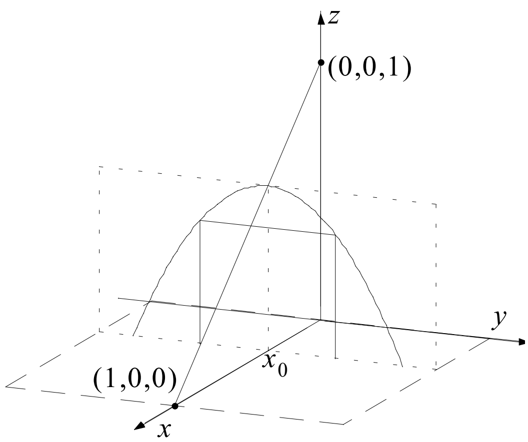


Figura 2

Ejercicio 2. Se considera la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-n\right)x^n$. Calcular su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su suma en dicho dominio.

Solución. Calculamos el radio de convergencia mediante

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-n}{2^{n+2}-(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{n}{2^{n+1}}}{2-\dfrac{n+1}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}.$$

Entonces, la serie es absolutamente convergente para $x\in(-1/2,1/2)$, divergente para $|x|>1/2$, y debemos analizar que ocurre en los puntos $x=1/2$ y $x=-1/2$. En primer lugar, si $x=1/2$, el término general es

$$\left(2^{n+1}-n\right)x^n=\frac{2^{n+1}-n}{2^n}=2-\frac{n}{2^n}$$

que no tiende a cero, sino a 2, por lo que la serie no es convergente. En el otro extremo, por igual razón, el valor absoluto del término general tiende a 2, en lugar de tender a cero, y tambien resulta una serie no convergente. En conclusión, el dominio de convergencia de la serie dada es el intervalo abierto $(-1/2,1/2)$.

Para calcular la función $s(x)$, suma de la serie en el intervalo de convergencia, descomponemos $s(x)=s_1(x)-s_2(x)$, donde

$$s_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n,\quad s_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n\,x^n.$$

Para sumar la primera serie, basta observar que es una serie geométrica de razón $2x$ y primer término 2, por lo que,

$$s_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2\,(2\,x)^n=\frac{2}{1-2x}.$$

Para sumar la segunda serie, tenemos que

$$s_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}=x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Finalmente, resulta

$$s(x)=s_1(x)-s_2(x)=\frac{2}{1-2x}-\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{2-5x+4x^2}{(1-2x)(1-x)^2}.$$

Ejercicio 3. Obtener la ecuación en que se transforma la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

donde $u=u\left(x,y\right)$, con el cambio a coordenadas polares $x=r\cos t,\ y=r\operatorname{sen} t$.

Solución. Usando la regla de la cadena, calculamos las derivadas parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen} t,\\
\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{\partial u}{\partial x}\left(-r\operatorname{sen} t\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left(r\cos t\right).
\end{aligned}$$

A continuación, y suponiendo que las derivadas cruzadas coinciden, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen} t\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2 t+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\operatorname{sen} t\cos t+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2 t.\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)r\operatorname{sen} t-\frac{\partial u}{\partial x}r\cos t+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)r\cos t-\frac{\partial u}{\partial y}r\operatorname{sen} t\\
&=-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(-r\operatorname{sen} t\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\left(r\cos t\right)\right)r\operatorname{sen} t-\frac{\partial u}{\partial x}r\cos t\\
&\quad+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\left(-r\operatorname{sen} t\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(r\cos t\right)\right)r\cos t-\frac{\partial u}{\partial y}r\operatorname{sen} t\\
&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}r^2\operatorname{sen}^2 t-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}r^2\operatorname{sen} t\cos t+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r^2\cos^2 t-r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen} t\right).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Por tanto, la ecuación de Laplace, en coordenadas polares, es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Ejercicio 4. Sea C una curva cerrada simple que encierra una región D.
(a) Demostrar, usando el teorema de Green, que

$$\acute{a}rea\,(D) = \oint_C x\,dy = \oint_C -y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

(b) Usando una de las anteriores integrales de línea, calcular el área del interior de la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

Solución. **(a)** El teorema de Green asegura que

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

Si elegimos $(P, Q) = (0, x)$, entonces

$$\oint_C x\,dy = \iint_D dx\,dy = \acute{a}rea\,(D)\,.$$

Si elegimos $(P, Q) = (-y, 0)$, entonces

$$\oint_C -y\,dx = \iint_D dx\,dy = \acute{a}rea\,(D)\,.$$

Usando los dos resultados, obtenemos

$$\oint_C x\,dy - y\,dx = \oint_C x\,dy + \oint_C -y\,dx = 2\,\acute{a}rea\,(D)\,.$$

(b) Parametrizamos la elipse de semiejes $a = 2$ y $b = \sqrt{5}$, mediante

$$\mathbf{r}\,(t) = \left(2\cos(t)\,, \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,(t)\right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Entonces $x\,(t) = 2\cos(t)\,,\ \ y\,(t) = \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,(t)\,,$ luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2\sqrt{5}\cos^2(t) + 2\sqrt{5}\,\mathrm{sen}^2(t)\right)\,dt \\ &= \sqrt{5}\int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\sqrt{5}\pi.\end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 7 de Julio de 2000

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 5. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Obtener las funciones derivadas f' y f'', junto con sus respectivos dominios.
(b) Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de f, en $x = 0$ y $x = 1/2$.
(c) Calcular los polinomios de Taylor de orden 2 de f, centrados en $x = 0$ y $x = 1/2$, cuando existan. Estudiar si f alcanza un extremo en $x = 1/2$ y, en ese caso, clasificarlo.

Solución. (a) Si $x \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right) \\ &= 1 - 2x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right). \end{aligned}$$

Si $x = 0$, calculamos el límite

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - h^2\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)}{h} \\ &= 1 - \lim_{h\to 0} h\cos\left(\frac{\pi}{h}\right) = 1. \end{aligned}$$

Calculamos la derivada segunda, para $x \neq 0$,

$$f''(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{2\pi}{x}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{\pi^2}{x^2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

En el punto $x = 0$, el cociente incremental para f' es

$$\frac{f'(h) - f'(0)}{h} = -2\cos\left(\frac{\pi}{h}\right) - \frac{\pi}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{h}\right).$$

El límite de la expresión anterior no existe cuando $h \to 0$. Por ello, f no tiene derivada segunda en $x = 0$.

Los dominios de f' y f'' son, respectivamente, $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) La recta tangente en $x = 0$, es

$$y = f(0) + f'(0)\,x = x.$$

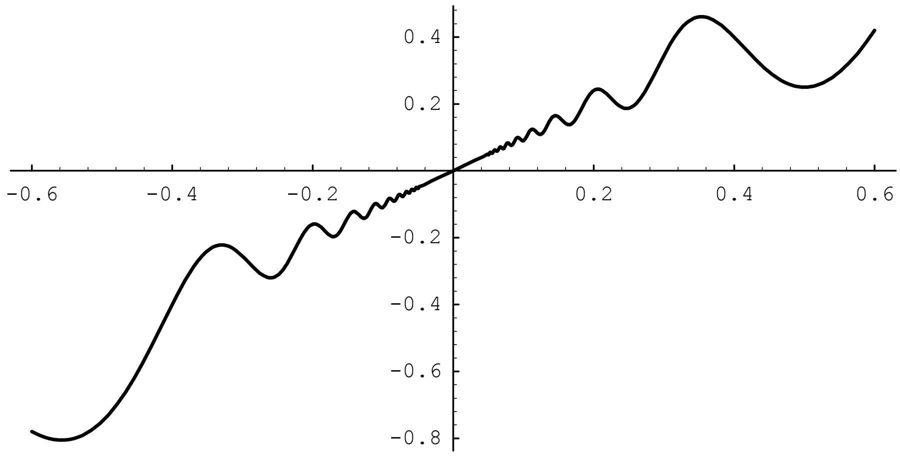
La recta tangente en $x = \dfrac{1}{2}$, es

$$y = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

(c) Como f no tiene derivada segunda en $x = 0$, no existe polinomio de Taylor de f de orden 2 en $x = 0$. En el punto $x = \dfrac{1}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \left(2\pi^2 - 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0. \end{aligned}$$

Dado que $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ y $f''\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$, *la función f tiene un mínimo local estricto en $x = \dfrac{1}{2}$.*



Gráfica de la función f

Ejercicio 6. Calcular, con un error menor que 0.01, un valor aproximado de la integral

$$I = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \operatorname{sen} x^2 \, dx,$$

utilizando la regla de Simpson.

Solución. Calculamos las cuatro primeras derivadas de la función integrando para obtener una cota del error cometido al aproximar con la regla de Simpson.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x^2, \\
f'(x) &= 2x \cos x^2, \\
f''(x) &= 2\cos x^2 - 4x^2 \operatorname{sen} x^2, \\
f'''(x) &= -12x \operatorname{sen} x^2 - 8x^3 \cos x^2, \\
f^{(4)}(x) &= -12 \operatorname{sen} x^2 - 48x^2 \cos x^2 + 16x^4 \operatorname{sen} x^2.
\end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en encontrar un cota de la derivada cuarta, en el intervalo de integración,

$$\begin{aligned}
\left|f^{(4)}(x)\right| &\leq 12 \left|\operatorname{sen} x^2\right| + 48x^2 \left|\cos x^2\right| + 16x^4 \left|\operatorname{sen} x^2\right| \\
&\leq 12 + 48\frac{\pi}{2} + 16\frac{\pi^2}{4} \\
&\leq 12 + 24\pi + 4\pi^2 < 127.
\end{aligned}$$

La fórmula de la cota del error asegura que

$$|E| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max \left|f^{(4)}(x)\right| < \frac{127\left(\frac{\pi}{2}\right)^{5/2}}{180n^4} < \frac{2.1819}{n^4}.$$

Para conseguir que $|E| < 0.01$, es suficiente que n sea tal que $\dfrac{2.1819}{n^4} \leq 0.01$, o lo que es igual, que $n^4 \geq 218.19$. Dado que $3^4 = 81$, $4^4 = 256$, elegimos el menor entero que satisface la desigualdad, es decir $n = 4$. Aplicando la fórmula de Simpson,

$$I \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right],$$

a nuestro problema, tenemos que $h = (b-a)/4 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}/4$, luego

$$I \approx \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{12}\left[0 + 4\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4}\right)^2 + 2\operatorname{sen}\left(2\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4}\right)^2 + 4\operatorname{sen}\left(3\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4}\right)^2 + 1\right] = 0.5483.$$

Las fórmulas de cuadratura de `MATLAB` nos proporcionan $I = 0.549276\ldots$, lo que indica que el error cometido es, aproximadamente, una milésima.

Ejercicio 7. Hallar la distancia mínima entre la elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ y la recta $x + y = 5$.

Solución. Los semiejes de la elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ son $a = \sqrt{6}$ y $b = \sqrt{3}$. Por ello, todos los puntos de la elipse están en el semiplano $x + y < 5$. Entonces, la distancia d entre un punto $P = (x, y)$ de la elipse y la recta $x + y - 5 = 0$, es

$$d(x,y) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|x + y - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{5 - x - y}{\sqrt{2}}.$$

Para encontrar los extremos de la distancia de la recta a la elipse, definimos la función lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = \frac{5 - x - y}{\sqrt{2}} + \lambda\left(x^2 + 2y^2 - 6\right).$$

Las condiciones necesarias para extremos condicionados son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + 2y^2 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Las dos primeras ecuaciones implican

$$2\lambda x = 4\lambda y = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

luego $\lambda \neq 0$, $\quad x = 2y$. Entonces, la ecuación $x^2 + 2y^2 = 6$, implica $6y^2 = 6$, por lo que $y = \pm 1$. En consecuencia, hemos obtenido los puntos $P_1 = (2, 1)$ y $P_2 = (-2, -1)$.

Finalmente, evaluamos la distancia a la recta en los dos puntos para determinar los valores mayor y menor,

$$\begin{aligned} d(P_1) &= \frac{5 - 3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \\ d(P_2) &= \frac{5 + 3}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

La distancia mínima se alcanza en $P_1 = (2, 1)$ y es $\sqrt{2}$, y la distancia máxima se alcanza en $P_2 = (-2, -1)$ y es $4\sqrt{2}$.

Ejercicio 8. Calcular el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, a través de la porción del cilindro parabólico $z = x^2$, limitada por los planos $z = a^2$ $(a > 0)$, $y = 0$, $y = b > 0$, orientada de forma que la componente z de la normal sea negativa. Comprobar el resultado, utilizando el teorema de la divergencia.

Solución. Teniendo en cuenta que $z = x^2 \le a^2$ implica que $|x| \le a$, usaremos la parametrización dada por $S(x,y) = (x,y,x^2)$, donde $-a \le x \le a$, $0 \le y \le b$. En primer lugar, obtenemos un vector paralelo al vector normal $\mathbf{n}$ mediante

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2x, 0, 1).$$

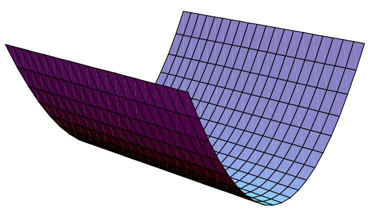
Observemos que $S_x \times S_y$ tiene componente z positiva, luego tiene sentido opuesto a $\mathbf{n}$. Por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S} &= \mathbf{F}\left(S(x,y)\right) \cdot \left(S_x \times S_y\right)(x,y)\ dx\, dy \\ &= -\left(x,y,x^2\right) \cdot (-2x,0,1)\ dx\, dy \\ &= x^2\, dx\, dy. \end{aligned}$$

La integral de flujo a través de S, es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S} = \int_{-a}^{a} \int_0^b x^2\, dx\, dy = b\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{2}{3}a^3 b.$$

Colocando un techo T y dos paredes laterales P^1 y P^2 a la superficie S, de forma que $S \cup T \cup P^1 \cup P^2$ sea la frontera del sólido Ω, podemos aplicar el teorema de la divergencia de Gauss.



La superficie S

El flujo de $\mathbf{F}$ a través de S, con la normal exterior $\mathbf{n}$, es $flu(S) = \dfrac{2}{3}a^3 b$. A continuación, calculamos los flujos exteriores a través del techo T y las paredes P^1 y P^2. El techo $T(x,y) = (x,y,a^2)$, donde $-a \le x \le a$, $0 \le y \le b$. Entonces, $T_x \times T_y = (0,0,1)$ tiene orientación exterior, por lo que

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S} = \left(x,y,a^2\right) \cdot (0,0,1)\ dx\, dy = a^2\, dx\, dy.$$

La integral de flujo es

$$flu(T) = \iint\limits_{T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S} = \int_{-a}^{a} \int_{0}^{b} a^2\, dx\, dy = a^2 b\, [x]_{-a}^{a} = 2a^3 b.$$

La pared $P^1(x, z) = (x, 0, z)$, donde $-a \leq x \leq a, \;\; x^2 \leq z \leq a^2$. Entonces, $P_x^1 \times P_z^1 = (0, -1, 0)$ tiene orientación exterior. Por tanto

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S} = (x, 0, z) \cdot (0, -1, 0)\; dx\, dz = 0.$$

La integral de flujo es $flu\left(P^1\right) = 0$. Finalmente, la pared P^2 viene dada por $P^2(x, z) = (x, b, z)$, donde $-a \leq x \leq a, \;\; x^2 \leq z \leq a^2$. Entonces, el producto vectorial $P_x^2 \times P_z^2 = (0, -1, 0)$ tiene orientación interior. Por tanto,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S} = -\,(x, b, z) \cdot (0, -1, 0)\; dx\, dz = b.$$

La integral de flujo es

$$\begin{aligned} flu\left(P^2\right) &= \iint_{P^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S} = \int_{-a}^{a} \int_{x^2}^{a^2} b\, dz\, dx = b \int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right)\, dx \\ &= b \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = b \left(2a^3 - \frac{2a^3}{3}\right) = \frac{4}{3} a^3 b. \end{aligned}$$

El flujo exterior a través de la frontera del sólido Ω es la suma

$$flu(S) + flu(T) + flu\left(P^1\right) + flu\left(P^2\right) = \frac{2}{3} a^3 b + 2a^3 b + \frac{4}{3} a^3 b = 4a^3 b.$$

La divergencia del campo es $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3$. Calculamos directamente

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F})\; dx\, dy\, dz &= \int_{-a}^{a} \int_{0}^{b} \int_{x^2}^{a^2} 3\, dz\, dy\, dx \\ &= \int_{-a}^{a} \int_{0}^{b} 3\left(a^2 - x^2\right)\; dy\, dx \\ &= 3b \int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right)\; dx \\ &= 4a^3 b. \end{aligned}$$

El resultado queda comprobado porque el teorema de Gauss afirma que *el flujo exterior a través de la frontera de* Ω *coincide con la integral triple de la divergencia del campo* $\mathbf{F}$.

◄★► ◄★► ◄★► ◄★► ◄★► ◄★►

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 26 de Enero de 2000

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Se considera la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Determinar, de entre los triángulos isósceles inscritos en dicha elipse, con un vértice en el punto $(0,b)$ y base paralela al eje OX, el que tenga área máxima.

Solución. Sea (x,y) un punto de la elipse. Entonces, el área del triangulo de vértices $(0,b)$, $(-x,y)$, (x,y) es $A=bh/2=x\,(b-y)$, $0\le x\le a$, $-b\le y\le b$. Dado que $x=a\sqrt{1-(y/b)^2}$ obtenemos $A(y)=(a/b)\sqrt{b^2-y^2}\,(b-y)$, donde $y\in[-b,b]$. Calculamos la derivada en el intervalo abierto $(-b,b)$,

$$\begin{aligned}
A'(y) &= \frac{a}{b}\left[\frac{1}{2}\left(b^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2y)\,(b-y)-\left(b^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&= \frac{a}{b}\left[\frac{-y\,(b-y)-\left(b^2-y^2\right)}{\left(b^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\\
&= \frac{a}{b}\left[\frac{(b-y)\,(-y-(b+y))}{\left(b^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\\
&= \frac{a}{b}\left[\frac{(b-y)\,(-2y-b)}{\left(b^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right].
\end{aligned}$$

Si $A'(y)=0$, entonces $2y=-b$, luego el *único* punto crítico en el intervalo $(-b,b)$ es $y^*=-b/2$. Observemos que si $-b<y<-b/2$, entonces $0<-2y-b$. Si $-b/2<y<b$, entonces $-2y-b<0$. Por lo tanto, $A'(y)$ cambia en y^* de positivo a negativo y el criterio de la primera derivada asegura que $A(y^*)$ es un máximo relativo. Además, $A(-b)=A(b)=0$, y el área es una función no negativa. En consecuencia, $A(y^*)$ es el único máximo absoluto de $A(y)$ en el intervalo cerrado $[-b,b]$.

La coordenada $x^*=a\sqrt{1-(y^*/b)^2}=a\sqrt{1-1/4}=a\sqrt{3}/2$. Los vértices del triángulo isósceles de área máxima son

$$(0,b)\,,\quad \left(-\frac{\sqrt{3}a}{2},-\frac{b}{2}\right),\quad \left(\frac{\sqrt{3}a}{2},-\frac{b}{2}\right).$$

El área máxima es

$$A(y^*)=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-\frac{b^2}{4}}\left(b+\frac{b}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab.$$

Ejercicio 2. Se desea calcular un punto crítico de la función $x \cos x$. Aplicar el Método de Newton a la función adecuada para obtener, partiendo de $x_0 = 1$, dos cifras decimales del punto crítico buscado. Explicar todos los pasos realizados.

Solución. Los puntos críticos de una función son aquellos en que la derivada se anula o bién no existe. Para la función dada, que es indefinidamente derivable en toda la recta real, serán los ceros de su derivada, que es la función

$$f(x) = \frac{d}{dx}(x \cos x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$$

Notemos, en primer lugar, que

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 > 0, \\ f(1) &= \cos 1 - \operatorname{sen} 1 = -0.30117 < 0, \end{aligned}$$

y que para $x \in (0,1)$, por ser $\cos x > 0,\ \operatorname{sen} x > 0,\ x > 0$, se verifica

$$f'(x) = -2 \operatorname{sen} x - x \cos x < 0.$$

Por tanto existe un único $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$.

Intentaremos aplicar, por tanto, el Método de Newton para calcular un cero de la función $f(x)$ tomando como punto inicial el dado. Se tiene, como hemos dicho,

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - x \operatorname{sen} x, \\ f'(x) &= -2 \operatorname{sen} x - x \cos x, \end{aligned}$$

de donde, para $x_0 = 1$,

$$\begin{aligned} f(1) &= \cos 1 - \operatorname{sen} 1 = -0.30117, \\ f'(1) &= -2 \operatorname{sen} 1 - \cos 1 = -2.2232, \end{aligned}$$

y, finalmente resulta, para la primera iteración,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-0.30}{-2.22} = 0.86453 \simeq 0.86$$

Para realizar la segunda iteración calculamos

$$\begin{aligned} f(0.86) &= 6.9286 \times 10^{-4}, \\ f'(0.86) &= -2.0768, \end{aligned}$$

de donde

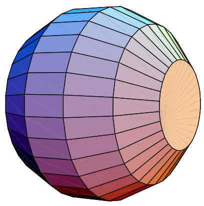
$$x_2 = 0.86 - \frac{f(0.86)}{f'(0.86)} = 0.86033 \simeq 0.86.$$

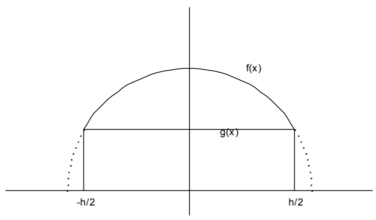
Al repetirse las dos primeras cifras decimales, las damos por buenas y detenemos los cálculos.

Ejercicio 3. Se perfora una esfera de radio r con un agujero cilíndrico (ver figura) de modo que el anillo esférico resultante tiene altura h.

1. Probar que el volumen del anillo es $V = \pi h^3/6$.
2. Calcular la superficie total del anillo.

Solución. El cuerpo se genera al girar una porción de circunferencia alrededor de un diámetro de la misma. Situaremos el eje de giro en el eje OX. Si se sitúa en el eje OY, la solución se obtiene de un modo semejante.





La función $f(x)$ está definida por la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$, es decir $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$. La función $g(x)=f(h/2)=\sqrt{r^2-(h^2/4)}$ es constante.

1. Aplicamos la fórmula habitual para el cálculo de un volumen de revolución:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-h/2}^{h/2} \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx = \pi \int_{-h/2}^{h/2} \left(r^2 - x^2 - r^2 + \frac{h^2}{4}\right) dx \\ &= \pi \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - x^2\right) dx = \pi \left(\frac{h^2}{4}h - \frac{x^3}{3}\Big]_{-h/2}^{h/2}\right) = \pi \left(\frac{h^3}{4} - \frac{2h^3}{24}\right) = \frac{\pi h^3}{6}. \end{aligned}$$

2. El área total se obtiene como la suma de las del cilindro y la superficie esférica. El área del cilindro S_c es $2\pi R_c h$, donde el radio del cilindro es $R_c=\sqrt{r^2-(h^2/4)}$. Por tanto, $S_c = 2\pi h\sqrt{r^2-(h^2/4)} = \pi h\sqrt{4r^2-h^2}$. El área de la superficie esférica S_e se calcula con la fórmula habitual que requiere el cálculo de $\sqrt{1+f'(x)^2}$:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}, \qquad \sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Finalmente, aplicamos la fórmula del área de una superficie de revolución:

$$\begin{aligned} S_e &= 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\, dx = 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{r^2-x^2}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} r\, dx = 2\pi r h. \end{aligned}$$

El área total será, por tanto $S = S_c + S_e = \pi h\left(2r + \sqrt{4r^2-h^2}\right)$.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 26 de Enero de 2000

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 4.

1. Enunciar el criterio de comparación por paso al límite para integrales impropias.
2. Estudiar la convergencia de la integral
$$I = \int_0^\infty x^k \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}\, dx$$
según los valores de $k \in \mathbb{R}$.

Solución. Sea $I = I_1 + I_2$, donde

$$I_1 = \int_0^1 x^k \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}\, dx, \quad I_2 = \int_1^\infty x^k \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}\, dx.$$

Para analizar la convergencia de I_1, usaremos que $x + \operatorname{sen} x \approx 2x$. Además

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} \text{ implica que } x - \operatorname{sen} x \approx \frac{x^3}{3!}.$$

Teniendo en cuenta el criterio de comparación por paso al límite, calculamos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^k \left(\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} \right)}{x^a} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^k \left(\dfrac{2x}{x^3/3!} \right)}{x^a} = \lim_{x \to 0^+} \frac{12 x^{k-2}}{x^a} = 12,$$

si $a = k - 2$. Entonces, el carácter de I_1 es el mismo que la integral $\int_0^1 x^{k-2}\, dx$. Dado que esta última integral converge si y sólo si $k - 2 > -1 \Leftrightarrow k > 1$, tenemos que I_1 converge si y sólo si $k > 1$.

Para analizar la convergencia de I_2, calculamos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + (\operatorname{sen} x / x)}{1 - (\operatorname{sen} x / x)} = 1.$$

Entonces,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^k \left(\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} \right)}{x^a} = 1,$$

si $a = k$. En consecuencia, el carácter de I_2 es el mismo que la integral $\int_1^\infty x^k\, dx$, que converge si y sólo si $k < -1$.

La intersección de los intervalos de convergencia de I_1 y I_2 es vacía, luego *no existen* valores de k tales que la integral I sea convergente.

Ejercicio 5.

1. Enunciar el Teorema de Taylor.

2. Determinar el grado del polinomio de Taylor en $\pi/3$ que es necesario para calcular $\cos(61^{\mathrm{o}})$ con un error menor que 10^{-3} y obtener dicho valor.

Solución. Para el apartado 2, comenzaremos escribiendo el desarrollo mediante el polinomio de Taylor y el correspondiente resto para $f(x) = \cos x$ en $\frac{\pi}{3}$. Por el teorema de Taylor, al ser el coseno una función indefinidamente derivable en toda la recta real, sabemos que, dado un x y un $n \geq 0$, existe un c entre $\frac{\pi}{3}$ y x tal que:

$$\begin{aligned} f(x) = \cos x = {} & \cos\frac{\pi}{3} - \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2!}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \\ & + \frac{1}{3!}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4 - \cdots \\ & + \frac{1}{n!}f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

El error que se comete al adoptar como valor de la función el que tome el polinomio de Taylor viene dado por el resto. Para acotar el valor absoluto de dicho error, basta notar que las sucesivas derivadas del coseno son, salvo el signo, senos o cosenos, y por tanto permanecen acotadas en valor absoluto por 1 en toda la recta real. Por tanto:

$$|\mathrm{error}\,(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!}\left|x-\frac{\pi}{3}\right|^{n+1}.$$

Para $x = 61^{\mathrm{o}} = \frac{61\pi}{180}$ radianes, buscamos un valor de n que garantice que

$$\frac{1}{(n+1)!}\left|x-\frac{\pi}{3}\right|^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left|\frac{61\pi}{180}-\frac{\pi}{3}\right|^{n+1} < \frac{1}{1000}$$

es decir, tal que

$$\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{61}{180}-\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!\,180^{n+1}} < \frac{1}{1000}$$

o, lo que es lo mismo, $(n+1)!\,(180/\pi)^{n+1} > 1000$. Por tanto es suficiente que sea $n = 1$, ya que $2 \cdot (180/\pi)^2 > 2 \cdot 57^2 = 6498 > 1000$.

Finalmente resulta

$$\begin{aligned} \cos(61^{\mathrm{o}}) = {} & \cos\left(\frac{61\pi}{180}\right) \simeq \cos\frac{\pi}{3} - \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{61\pi}{180}-\frac{\pi}{3}\right) \\ = {} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi\sqrt{3}}{180}\right) = 0.48489. \end{aligned}$$

Como comprobación, el verdadero valor es $\cos(\frac{61\pi}{180}) = 0.\,48481$.

Ejercicio 6. Obtener el desarrollo en serie de Taylor en 0 de

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

indicando el dominio de convergencia. (Utilizar descomposición en fracciones simples)

Solución. En primer lugar, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}.$$

Simplificando y multiplicando por $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, obtenemos

$$2x - 5 = A(x - 3) + B(x - 2).$$

Ahora, para calcular los valores de A y de B, damos a x los valores $x = 2$, $x = 3$:

$$\begin{aligned} x = 2 &\Rightarrow -1 = -A \Rightarrow A = 1, \\ x = 3 &\Rightarrow 1 = B. \end{aligned}$$

Finalmente, operamos con la descomposición, para poder usar la serie geométrica:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x - 3} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (x/2)} - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - (x/3)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n \\ &= \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n. \end{aligned}$$

Como $f(x)$ se expresa como la serie de potencias $\frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n$, el teorema de unicidad garantiza que dicha serie es la serie de Taylor de $f(x)$.

Usando el criterio del cociente, obtenemos el radio de convergencia $R = 2$. En los extremos $x = \pm 2$, tenemos que no se cumple la condición necesaria de convergencia de series porque

$$\lim_{n \to \infty} |a_n x^n| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) 2^n = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Entonces, el dominio de convergencia es $(-2, 2)$.

CÁLCULO

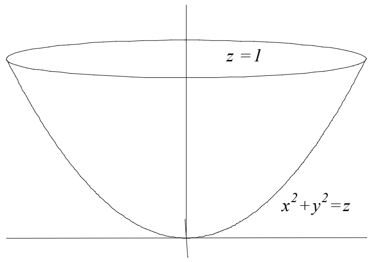
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 14 de Junio de 2000

Ejercicio 1. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y,z) = x+y+z$, en el conjunto

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 1\right\}.$$

Solución. El conjunto A es la parte interior del paraboloide $x^2+y^2 = z$, situada por debajo del plano $z = 1$.



Porción del paraboloide

Se trata de un conjunto cerrado y acotado, de forma que como f es una función continua, tenemos garantía de que existen el máximo y el mínimo de la función en el conjunto dado. Dichos extremos deben encontrarse entre los extremos relativos de la función que estén en el interior del conjunto, los extremos condicionados a la restricción del paraboloide, los que se obtienen en el plano, y, finalmente, los que se encuentran en la circunferencia intersección de ambas superficies.

Como quiera que el gradiente $\nabla f = (1,1,1)$ no se anula nunca, no existen extremos relativos de la función en el interior de A.

Para encontrar los extremos sobre el paraboloide usamos la función lagrangiana

$$L(x,y,z,\lambda) = x+y+z+\lambda\left(x^2+y^2-z\right)$$

de donde obtenemos las condiciones

$$\begin{aligned} 1+2\lambda x &= 0 \\ 1+2\lambda y &= 0 \\ 1-\lambda &= 0 \end{aligned}$$

que tienen como solución:

$$\lambda = 1, \;\; x = -\frac{1}{2}, \;\; y = -\frac{1}{2}, \;\; z = x^2+y^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Tenemos, por tanto, que el primer candidato es

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Los extremos sobre el plano $z = 1$ pueden obtenerse, por ejemplo, con

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(z - 1)$$

que dan lugar a las condiciones

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \\ 1 &= 0 \\ 1 + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

que son claramente incompatibles.

Finalmente, sobre la intersección y usando las dos restricciones:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z + \lambda\left(x^2 + y^2 - z\right) + \mu(z - 1)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0 \\ 1 + 2\lambda y &= 0 \\ 1 - \lambda + \mu &= 0 \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones $x = y$, y como $x^2 + y^2 = z = 1$, concluimos que $x = y = \pm 1/\sqrt{2}$, y, por supuesto, $z = 1$. Tenemos, pues, otros dos candidatos:

$$P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \text{ y } P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Ya sólo nos queda evaluar la función en los tres puntos para determinar los valores mayor y menor:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -1/2 \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) &= 1 + \sqrt{2} \\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) &= 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Solución. *El mínimo de f se alcanza en $(-1/2, -1/2, 1/2)$ y vale $-1/2$, y el máximo se alcanza en $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1\right)$ y vale $1 + \sqrt{2}$.*

Ejercicio 2. Sea R la región en el plano $\mathbb{R}^2$ limitada por las curvas

$$x^2 - y^2 = 1, \;\; x^2 - y^2 = 9, \;\; x + y = 4, \;\; x + y = 6.$$

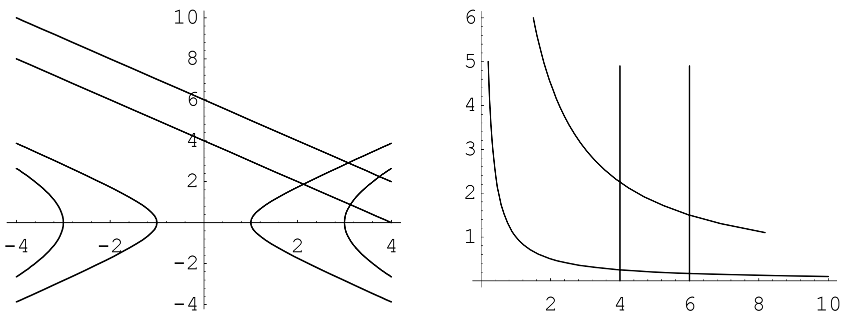
Mediante el cambio de variables $u = x + y, \;\; v = x - y$, se transforma la región dada en otra región T. Se pide:

1. Representar gráficamente las regiones R y T.
2. Calcular el área de la región R utilizando T.
3. Siendo C la frontera de la región R recorrida en sentido positivo, obtener el valor de la integral de línea

$$\oint_C \left(x^2 - y^2\right) \, dx + \left(x^2 - 4\right) \, dy \, .$$

Solución. 1. Teniendo en cuenta que $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = uv$, el cambio de variables transforma la región R en la región T, que está acotada por las rectas verticales $u = 4, \; u = 6$, y las curvas $uv = 1, \; uv = 9$. Es decir,

$$T = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq u \leq 6, \;\; \frac{1}{u} \leq v \leq \frac{9}{u} \right\}.$$



Las regiones R y T

2. El teorema del cambio de variables asegura que el área

$$A(R) = \iint\limits_R dx \, dy = \iint\limits_T \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| du \, dv.$$

Calculamos

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)}} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{2}.$$

Entonces

$$A(R) = \int_4^6 \int_{1/u}^{9/u} \frac{1}{2} \, dv \, du = \frac{1}{2} \int_4^6 \left(\frac{9}{u} - \frac{1}{u} \right) du = 4 \int_4^6 \frac{1}{u} du = 4 \ln \left(\frac{3}{2} \right).$$

3. El teorema de Green asegura que

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy = \iint\limits_R (Q_x - P_y) \, dx \, dy.$$

Sabemos que $P = \left(x^2 - y^2\right)$ y $Q = \left(x^2 - 4\right)$. Entonces $Q_x - P_y = 2x + 2y$, por lo que, usando de nuevo el teorema del cambio de variables, obtenemos

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy = \iint\limits_R 2(x + y) \, dx \, dy = \int_4^6 \int_{1/u}^{9/u} 2u \frac{1}{2} \, dv \, du = \int_4^6 u \left(\frac{8}{u} \right) du = 16.$$

Ejercicio 3. Sea S el trozo de la superficie del paraboloide $z = x^2+(y-1)^2$, interior al cilindro $x^2+(y-2)^2 = 3$. Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,x,xz)$. Se pide calcular la integral $\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S}$, con la normal exterior al paraboloide,

1. Directamente.
2. Usando el teorema de Stokes.
3. Usando el teorema de Gauss.

Solución. 1. En primer lugar, calculamos el rotacional del campo $\mathbf{F}$,

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ y & x & xz \end{vmatrix} = (0,-z,0).$$

Usaremos coordenadas cilíndricas, con centro en el vértice $(0,2,0)$ del cilindro $x^2+(y-2)^2 = 3$. Entonces, la parametrización del trozo del paraboloide interior al cilindro es

$$S(u,v) = \left(u\cos v, 2+u\operatorname{sen} v, u^2+2u\operatorname{sen} v+1\right), \quad 0 \le u \le \sqrt{3}, \quad 0 \le v \le 2\pi.$$

Obtenemos un vector paralelo al vector normal a la superficie mediante

$$S_u \times S_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 2u+2\operatorname{sen} v \\ -u\operatorname{sen} v & u\cos v & 2u\cos v \end{vmatrix} = \left(-2u^2\cos v, -2u^2\operatorname{sen} v-2u, u\right).$$

Dado que en el vértice $(0,1,0) = S(1,3\pi/2)$, el vector $S_u \times S_v(1,3\pi/2) = (0,0,1)$ apunta hacia el interior del paraboloide, tenemos que la normal exterior a S tiene sentido opuesto a $S_u \times S_v$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S} &= -\operatorname{rot}(\mathbf{F})(S(u,v)) \cdot (S_u \times S_v)(u,v)\; du\, dv \\
&= \left(0, u^2+2u\operatorname{sen} v+1, 0\right) \cdot \left(-2u^2\cos v, -2u^2\operatorname{sen} v-2u, u\right)\; du\, dv \\
&= -\left(2u^4\operatorname{sen} v + 4u^3\operatorname{sen}^2 v + 6u^2\operatorname{sen} v + 2u^3 + 2u\right)\; du\, dv.
\end{aligned}$$

La integral pedida es

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S} &= -\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \left[\left(2u^4+6u^2\right)\operatorname{sen} v + 4u^3\operatorname{sen}^2 v + 2u^3 + 2u\right]\; dv\, du \\
&= -\int_0^{\sqrt{3}} \left[4u^3\left(\frac{v}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2v}{4}\right) + \left(2u^3+2u\right)v\right]_0^{2\pi}\; du \\
&= -\int_0^{\sqrt{3}} \left(8\pi u^3 + 4\pi u\right)\; du \\
&= -\left[2\pi u^4 + 2\pi u^2\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= -24\pi.
\end{aligned}$$

2. Sea C la curva frontera de S. La parametrización de C viene dada por

$$\mathbf{r}(v) = S\left(\sqrt{3}, v\right) = \left(\sqrt{3}\cos v, 2+\sqrt{3}\operatorname{sen} v, 4+2\sqrt{3}\operatorname{sen} v\right), \quad 0 \le v \le 2\pi.$$

La orientación inducida por la normal exterior al paraboloide es opuesta a la orientación de C con la parametrización dada. Entonces, el teorema de Stokes asegura que

$$\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S} = \oint_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_0^{2\pi} \mathbf{F}[\mathbf{r}(v)] \cdot \mathbf{r}'(v)\; dv.$$

Dado que

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\left[\mathbf{r}\left(v\right)\right] &= \left(2+\sqrt{3}\operatorname{sen}v, \sqrt{3}\cos v, \sqrt{3}\cos v\left(4+2\sqrt{3}\operatorname{sen}v\right)\right)\\ \mathbf{r}'\left(v\right) &= \left(-\sqrt{3}\operatorname{sen}v, \sqrt{3}\cos v, 2\sqrt{3}\cos v\right),\end{aligned}$$

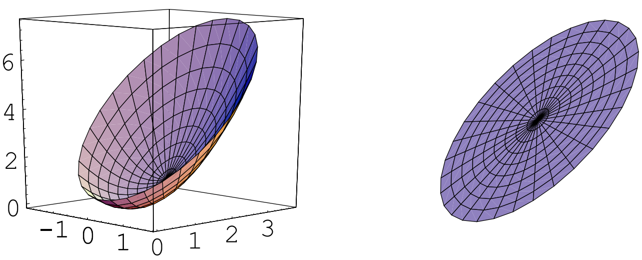
su producto escalar

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\left[\mathbf{r}\left(v\right)\right]\cdot\mathbf{r}'\left(v\right) &= -2\sqrt{3}\operatorname{sen}v - 3\operatorname{sen}^2 v + 3\cos^2 v + 24\cos^2 v + 12\sqrt{3}\cos^2 v\operatorname{sen}v\\ &= -2\sqrt{3}\operatorname{sen}v - 3 + 30\cos^2 v + 12\sqrt{3}\cos^2 v\operatorname{sen}v.\end{aligned}$$

Calculamos la integral de línea

$$\begin{aligned}-\int_0^{2\pi}\mathbf{F}\left[\mathbf{r}\left(v\right)\right]\cdot\mathbf{r}'\left(v\right)\,dv &= -\left[2\sqrt{3}\cos v - 3v + 30\left(\frac{v}{2}+\frac{\operatorname{sen}2v}{4}\right) - \frac{12\sqrt{3}}{3}\cos^3 v\right]_0^{2\pi}\\ &= 6\pi - 30\pi\\ &= -24\pi.\end{aligned}$$

3. Colocando un techo T a la superficie S, de forma que $\Omega = S\cup T$ sea una superficie cerrada, podemos aplicar el teorema de Gauss.



Superficie S y techo T

Sabemos que $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\left(\mathbf{F}\right)\right) = 0$. Entonces,

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}\left(\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} + \iint\limits_T \operatorname{rot}\left(\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} = \iiint\limits_\Omega \operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\left(\mathbf{F}\right)\right)\,dx\,dy\,dz = 0,$$

lo que implica que

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}\left(\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} = -\iint\limits_T \operatorname{rot}\left(\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S}.$$

La superficie T es la curva C y su interior. Es decir,

$$T\left(u,v\right) = \left(u\cos v, 2+u\operatorname{sen}v, 4+2u\operatorname{sen}v\right),\quad 0\le u\le\sqrt{3},\quad 0\le v\le 2\pi.$$

Calculamos el producto vectorial

$$T_u\times T_v = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \cos v & \operatorname{sen}v & 2\operatorname{sen}v\\ -u\operatorname{sen}v & u\cos v & 2u\cos v\end{vmatrix} = \left(0,-2u,u\right).$$

La normal exterior al techo T tiene el mismo sentido que $T_u\times T_v$. Entonces,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\left(\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} &= \operatorname{rot}\left(\mathbf{F}\right)\left(T\left(u,v\right)\right)\cdot\left(T_u\times T_v\right)\left(u,v\right)\,du\,dv\\ &= \left(0,-4-2u\operatorname{sen}v,0\right)\cdot\left(0,-2u,u\right)\,du\,dv\\ &= \left(8u+4u^2\operatorname{sen}v\right)\,du\,dv.\end{aligned}$$

Obtenemos la integral

$$\begin{aligned}\iint_T \operatorname{rot}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} &= \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\left(8u+4u^2\operatorname{sen}v\right)\,dv\,du\\ &= \int_0^{\sqrt{3}} 16\pi u\,du\\ &= \left[8\pi u^2\right]_0^{\sqrt{3}}\\ &= 24\pi.\end{aligned}$$

Por tanto, el flujo del rotacional del campo a través de S, es

$$\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} = -24\pi.$$

Nota. Si usamos coordenadas cilíndricas, con centro en el vértice $(0,1,0)$ del paraboloide $z=x^2+(y-1)^2$, la parametrización es

$$S(u^*,v^*) = \left(u^*\cos v^*, 1+u^*\operatorname{sen}v^*, u^{*2}\right).$$

En este caso, los parámetros deben verificar

$$(u^*\cos v^*)^2 + (u^*\operatorname{sen}v^*-1)^2 = u^{*2}-2u^*\operatorname{sen}v^*+1 \le 3,$$

es decir, $u^{*2}-2u^*\operatorname{sen}v^*-2\le 0$. Las raíces de ese polinomio, resuelto en u^*, son

$$u^* = \frac{2\operatorname{sen}v^* \pm \sqrt{4\operatorname{sen}^2 v^*+8}}{2} = \operatorname{sen}v^* \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 v^*+2},$$

siendo negativa la correspondiente al signo menos. Por tanto, el dominio es

$$D^* = \left\{(u^*,v^*)\in\mathbb{R}^2 : 0\le u^*\le \operatorname{sen}v^*+\sqrt{\operatorname{sen}^2 v^*+2},\ \ 0\le v^*\le 2\pi\right\}.$$

◄○► ◄○► ◄○► ◄○► ◄○► ◄○►

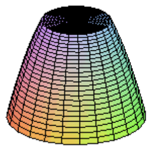
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen del 14 de Septiembre de 2000

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Un flan tiene forma de tronco de paraboloide de revolución, siendo r y $2r$ los radios de sus bases y h su altura. Determinar su volumen y el volumen de la porción obtenida al cortarlo verticalmente desde un punto del borde superior.



Solución. Sea $z(x) = ax^2 + bx + c$, una parábola, contenida en el plano $y = 0$, que genera el paraboloide. Sabemos que tiene su vértice en el eje OZ y que pasa por los puntos $(r, 0, h)$ y $(2r, 0, 0)$. En $x = 0$ hay una tangente horizontal, por lo que $0 = z'(0) = b$. Entonces, la parábola es $z(x) = ax^2 + c$.

Además, tenemos que $ar^2 + c = h$, y que $4ar^2 + c = 0$. Estas ecuaciones implican $3ar^2 = -h$, luego

$$a = -\frac{h}{3r^2}, \quad c = -4ar^2 = \frac{4h}{3}.$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es

$$z(x) = -\frac{h}{3r^2}x^2 + \frac{4h}{3} = \frac{h}{3}\left(4 - \frac{x^2}{r^2}\right) = \frac{h}{3r^2}\left(4r^2 - x^2\right).$$

Para calcular el volumen del flan, observamos que

$$x^2 = 4r^2 - \frac{3r^2}{h}z,$$

por lo que

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h x^2 dz = \pi \int_0^h \left(4r^2 - \frac{3r^2}{h}z\right) dz \\ &= \pi \left(4r^2 h - \frac{3r^2h^2}{2h}\right) = \left(4 - \frac{3}{2}\right)\pi r^2 h \\ &= \frac{5}{2}\pi r^2 h. \end{aligned}$$

Para calcular el volumen de la porción, integramos el área $A(x)$ de las secciones obtenidas al cortar el flan con planos paralelos al plano $x = 0$, entre r y $2r$. Dichas secciones son parábolas con vértices en los puntos $(x, 0, z(x))$ y que pasan por los puntos $\left(x, \pm\sqrt{4r^2 - x^2}, 0\right)$. Denotando $\beta(x) = \sqrt{4r^2 - x^2}$, la ecuación de estas parábolas es $Z(x, y) = py^2 + q$, donde

$$z(x) = Z(x, 0) = q, \quad 0 = Z(x, \pm\beta(x)) = p\beta^2(x) + q.$$

Entonces, $p = -\dfrac{z(x)}{\beta^2(x)}$, y la ecuación del paraboloide de revolución es

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= -\frac{z(x)}{\beta^2(x)} y^2 + z(x) \\ &= z(x) \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2(x)}\right) \\ &= \frac{h}{3r^2} \left(4r^2 - x^2\right) \left(\frac{4r^2 - x^2 - y^2}{4r^2 - x^2}\right) \\ &= \frac{h}{3r^2} \left(4r^2 - x^2 - y^2\right). \end{aligned}$$

Usando la simetría de la parábola $Z = py^2 + q$, su área es

$$\begin{aligned} A(x) &= 2 \int_0^{\beta(x)} \left(py^2 + q\right) dy \\ &= 2 \left[p\frac{y^3}{3} + qy\right]_0^{\beta(x)} \\ &= 2 \left(-\frac{z(x)}{\beta^2(x)} \frac{\beta^3(x)}{3} + z(x)\beta(x)\right) \\ &= \frac{4}{3} z(x)\beta(x) \\ &= \frac{4h}{9r^2} \left(4r^2 - x^2\right) \sqrt{4r^2 - x^2}. \end{aligned}$$

El volumen de la porción del flan viene dado por

$$V_P = \frac{4h}{9r^2} \int_r^{2r} \left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Usaremos el cambio de variable $x = 2r \operatorname{sen}\theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, para calcular

$$\begin{aligned} \int_r^{2r} \left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4r^2 \cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} 2r\cos\theta \, d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2r\cos\theta)^4 \, d\theta \\ &= 16r^4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d\theta. \end{aligned}$$

Desarrollando el integrando

$$\begin{aligned}
\cos^4\theta &= \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[1+2\cos 2\theta+\left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta\right),
\end{aligned}$$

calculamos la integral

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta &= \frac{1}{8}\left[3\theta+2\operatorname{sen} 2\theta+\frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{8}\left[3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-2\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{8}\left(\pi-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right).
\end{aligned}$$

En consecuencia, el volumen de la porción es

$$\begin{aligned}
V_P &= \frac{4h}{9r^2}\frac{16r^4}{8}\left(\pi-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right) \\
&= \frac{8r^2h}{9}\left(\pi-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right) \\
&= \left(\frac{8}{9}\pi-\sqrt{3}\right)r^2h.
\end{aligned}$$

Ejercicio 2. Estudiar la convergencia de

$$I_n = \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}} dx, \quad n \geq 1.$$

Probar que $I_n = \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right) I_{n-1}$, para $n \geq 2$. Calcular I_1, I_2 y I_3.

Solución. La integral dada sólo presenta problema debido al intervalo infinito (primera especie) ya que el integrando es continuo en toda la recta real (función racional cuyo denominador no se anula nunca). Puesto que el integrando es positivo y, para $x \to \infty$, se comporta como

$$\frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}} \simeq \frac{x^{2n-1}}{x^{2n+6}} \simeq \frac{1}{x^7},$$

cualquiera que sea $n \geq 1$, podemos utilizar el criterio de comparación por paso al límite con $\int_1^\infty \frac{dx}{x^7}$ para concluir que la integral dada es convergente.

Aplicando integración por partes, con $u = x^{2n-2}$ y $dv = x\,(x^2+1)^{-(n+3)}\,dx$, resulta $du = (2n-2)x^{2n-3}$ y $v = -\frac{1}{2(n+2)}\,(x^2+1)^{-(n+2)}$ y, por consiguiente, para cualquier $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\infty u\,dv = uv\big|_0^\infty - \int_0^\infty v\,du \\
&= -\frac{x^{2n-2}}{2(n+2)\,(x^2+1)^{(n+2)}}\Bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{(2n-2)x^{2n-3}}{2(n+2)\,(x^2+1)^{(n+2)}}\,dx \\
&= 0 + \frac{(n-1)}{(n+2)} \int_0^\infty \frac{x^{2n-3}}{(x^2+1)^{(n+2)}}\,dx \\
&= \frac{(n-1)}{(n+2)}\,I_{n-1}.
\end{aligned}$$

Las integrales cuyo cálculo nos piden son:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^4}\,dx = \frac{-1}{6\,(x^2+1)^3}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{6},$$

y, aplicándo la fórmula demostrada antes, se obtienen

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^3}{(x^2+1)^5}\,dx &= I_2 = \frac{1}{4} I_1 = \frac{1}{24}, \\
\int_0^\infty \frac{x^5}{(x^2+1)^6}\,dx &= I_3 = \frac{2}{5} I_2 = \frac{1}{60}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 + \frac{1}{n}\right) (x-1)^n,$$

determinar su radio de convergencia. Estudiar la convergencia en los extremos. Hallar su suma.

Solución. El término general es $a_n = \dfrac{n^3+1}{n}$. Su radio de convergencia es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{(n+1)^3+1}\right) = 1.$$

Entonces, la serie es absolutamente convergente si $|x-1| < 1$, es decir, en el intervalo $(0,2)$ y divergente si $|x-1| > 1$. En los puntos $x=0$ y $x=2$, los respectivos términos generales no convergen a cero, luego la serie es divergente en ambos puntos. Para calcular la suma de la serie $s(x)$, en el intervalo $(0,2)$, sea $s(x) = s_1(x) + s_2(x)$, donde

$$s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-1)^n, \quad s_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-1)^n.$$

En primer lugar, calculamos la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n = \frac{1}{1-(x-1)} - 1 = \frac{1-(2-x)}{2-x} = \frac{x-1}{2-x}.$$

Para obtener la primera suma, derivamos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,(x-1)^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{2-x}\right)\\ &= \frac{(2-x)+(x-1)}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2},\end{aligned}$$

por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(x-1)^n = \frac{(x-1)}{(2-x)^2}.$$

Derivando de nuevo, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,(x-1)^n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\,(x-1)^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{(2-x)^2}\right)\\ &= \frac{(2-x)^2 + 2\,(2-x)\,(x-1)}{(2-x)^4} = \frac{x}{(2-x)^3}.\end{aligned}$$

Entonces, la primera suma es

$$s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-1)^n = \frac{(x-1)\,x}{(2-x)^3}, \quad 0 < x < 2.$$

Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (t-1)^n = \frac{t-1}{2-t} \quad 0 < t < 2.$$

Integrando ambos términos en el intervalo con puntos terminales x y 1, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_1^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (t-1)^n \right) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_1^x (t-1)^n \, dt \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(t-1)^{n+1}}{n+1} \right]_1^x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} &= \int_1^x \frac{t-1}{2-t} dt \\
&= \int_1^x \left(-1 + \frac{1}{2-t} \right) dt \\
&= \left[-t - \ln(2-t) \right]_1^x \\
&= -x + 1 - \ln(2-x).
\end{aligned}$$

Entonces, la segunda suma es

$$\begin{aligned}
s_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-1)^n = (x-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \\
&= (x-1) - x + 1 - \ln(2-x) \\
&= -\ln(2-x),
\end{aligned}$$

donde $0 < x < 2$. En conclusión, la suma de la serie, en el intervalo $(0, 2)$, es

$$s(x) = \frac{(x-1)\,x}{(2-x)^3} - \ln(2-x).$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen del 14 de Septiembre de 2000

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 4. Se dispone de 20 metros de alambre para delimitar un triángulo equilátero, un cuadrado, o bien ambas figuras. ¿Cuántos metros de alambre deben dedicarse a construirlas, si se pretende que la figura o figuras encierren el área máxima posible?

Solución. Puesto que se trata de un triángulo equilátero y de un cuadrado, sea $T = 3x$ la cantidad de alambre dedicada al triángulo, de lado x, y sea $C = 4y$ la dedicada al cuadrado, de lado y, con lo que $T + C = 3x + 4y = 20$ será nuestra restricción. La altura del triángulo será $\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ y su área, por tanto $A_T = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$. El área del cuadrado será $A_C = y^2$. Nuestro problema es, entonces maximizar la función

$$f(x,y) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + y^2,$$

con la restricción $g(x,y) = 3x + 4y - 20 = 0$, donde $0 \leq x$, $0 \leq y$. Observemos que:

Para $x = 0$, $y = 5$, $f(0,5) = 25$.

Para $y = 0$, $x = \frac{20}{3}$, $f(\frac{20}{3}, 0) = \frac{100}{9}\sqrt{3} = 19.245$.

Para el resto de valores posibles, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, los posibles extremos se obtienen resolviendo el adecuado sistema:

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_x = \lambda g_x \\ g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = 3\lambda \\ 2y = 4\lambda \\ 3x + 4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y\sqrt{3} \\ 3y\sqrt{3} + 4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = \frac{20}{4+3\sqrt{3}} = 2.1748 \\ x = \frac{20\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} = 3.7669 \end{array}$$

obteniéndose un único punto

$$x = \frac{20\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}} = 3.7669, \; y = \frac{20}{4 + 3\sqrt{3}} = 2.1748$$

correspondiente a $T = 3.7669 \cdot 3 = 11.301$, $C = 2.1748 \cdot 4 = 8.699$, si bien no sabemos si se trata de un maximo o de un mínimo. Por ello calculamos el valor de la función en el punto obtenido y lo comparamos con los hallados para $x = 0$, e $y = 0$. Puesto que

$$f(3.7669, 2.1748) = 3.7669^2\sqrt{3}/4 + 2.1748^2 = 10.874,$$

concluimos que se trata de un mínimo y que el máximo se alcanza en $x = 0$.

Es decir, se debe dedicar todo el alambre a construir un cuadrado de lado 5 metros y área 25 metros cuadrados.

Ejercicio 5. Sea C el arco de la circunferencia $(x-2)^2+y^2=4$, orientado positivamente. Usar el teorema de Green para calcular

$$\oint_C \left(x^2+2y^3\right) dy.$$

Solución. El teorema de Green asegura que

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_R (Q_x-P_y)\,dx\,dy,$$

donde R es el disco $(x-2)^2+y^2\leq 4$. Dado que $Q_x-P_y=2x$, obtenemos

$$\oint_C \left(x^2+2y^3\right) dy=\iint\limits_R 2x\,dx\,dy.$$

Para calcular la integral doble, usaremos el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} x&=2+r\cos\theta,\\ y&=r\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $(x-2)^2+y^2=r^2\leq 4$, el disco R se transforma en

$$T=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq r\leq 2,\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi\right\}.$$

El jacobiano del cambio es r, luego la formula del cambio de variables es

$$\begin{aligned}
\iint_R 2xdx\,dy &= \iint_T 2\left(2+r\cos\theta\right) r\,dr\,d\theta\\
&=4\iint_T r\,dr\,d\theta+2\iint_T r^2\cos\theta\,dr\,d\theta\\
&=4\left(\int_0^2 r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)+2\left(\int_0^2 r^2\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right)\\
&=4\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2\left([\theta]_0^{2\pi}\right)+2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2\left([\operatorname{sen}\theta]_0^{2\pi}\right)\\
&=16\pi.
\end{aligned}$$

Nota. La fórmula del centro de masa $(\overline{x},\overline{y})$ del disco R, con densidad constante $\rho(x,y)=1$, implica

$$\iint\limits_R xdx\,dy=\overline{x}\iint\limits_R dx\,dy=2\,\acute{a}rea\,(R)=8\pi.$$

Entonces, el valor de la integral pedida es 16π.

Ejercicio 6. Sea S la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$, situada en el primer octante y limitada por el plano $z = 1$, y sea $F(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.
1. Calcular $\iint_S F \cdot n\, dS$, siendo n la normal interior al paraboloide.
2. Calcular directamente la integral $\oint_C F \cdot dr$, donde C es la curva frontera de S.
3. Comprobar el cálculo anterior usando el teorema de Stokes.

Solución. 1. Usando coordenadas cilíndricas, $z = x^2 + y^2 = r^2$, por lo que la parametrización es $S(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r^2)$, donde $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$. El producto vectorial fundamental es

$$S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 2r \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r\right).$$

En el punto $S(1, 0) = (1, 0, 1)$, tenemos que $S_r \times S_\theta(1, 0) = (-2, 0, 1)$ apunta hacia el interior del paraboloide. Entonces, la normal n tiene la misma dirección que $S_r \times S_\theta$. Calculamos $F \cdot n\, dS = F(S(r, \theta)) \cdot (S_r \times S_\theta)\, dr\, d\theta =$

$$\begin{aligned} &= \left(r\operatorname{sen}\theta - r^2, r^2 - r\cos\theta, r(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\right) \cdot \left(-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r\right)\, dr\, d\theta \\ &= \left[2r^4\cos\theta - 2r^4\operatorname{sen}\theta + r^2(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\right]\, dr\, d\theta \\ &= \left(2r^4 + r^2\right)(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta. \end{aligned}$$

La integral de flujo a través de S, es

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n\, dS &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(2r^4 + r^2\right)(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta \\ &= \left(\int_0^1 \left(2r^4 + r^2\right) dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\, d\theta\right) \\ &= \left(\left[\frac{2r^5}{5} + \frac{r^3}{3}\right]_0^1\right)\left([\operatorname{sen}\theta + \cos\theta]_0^{\pi/2}\right) \\ &= \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right)(1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

2. La frontera de S es la curva cerrada $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde C_1 es la intersección de S con el plano $y = 0$, es decir $\theta = 0$. Su parametrización es

$$r_1(t) = S(t, 0) = \left(t, 0, t^2\right), \quad r_1'(t) = (1, 0, 2t), \quad 0 \le t \le 1.$$

La curva C_2 es la intersección de S con el plano $z = 1$, es decir $r = 1$. Su parametrización es

$$r_2(t) = S(1, \theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1), \quad r_2'(t) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0), \quad 0 \le \theta \le \pi/2.$$

Observemos que $r_2(0) = (1, 0, 1)$ y $r_2(\pi/2) = (0, 1, 1)$, por lo que su orientación es positiva. La curva C_3 es la intersección de S con el plano $x = 0$, es decir $\theta = \pi/2$. Si elegimos la parametrización

$$r_3(t) = S(t, \pi/2) = \left(0, t, t^2\right), \quad r_3'(t) = (0, 1, 2t), \quad 0 \le t \le 1,$$

entonces la orientación de C_3 es negativa. En consecuencia,

$$\oint_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr_1 + \int_{C_2} F \cdot dr_2 - \int_{C_3} F \cdot dr_3.$$

Vamos a calcular estas tres integrales de línea,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} F \cdot dr_1 &= \int_0^1 F\left(r_1\left(t\right)\right) \cdot r_1'\left(t\right)\, dt = \int_0^1 \left(-t^2, t^2 - t, t\right) \cdot \left(1, 0, 2t\right)\, dt \\ &= \int_0^1 \left(-t^2 + 2t^2\right)\, dt = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} F \cdot dr_2 &= \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}\theta - 1, 1 - \cos\theta, \cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right) \cdot \left(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0\right)\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1\right)\, d\theta = \left[-\cos\theta + \operatorname{sen}\theta - \theta\right]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$-\int_{C_3} F \cdot dr_3 = -\int_0^1 \left(t - t^2, t^2, -t\right) \cdot \left(0, 1, 2t\right)\, dt = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}.$$

El valor de la integral de línea sobre la curva frontera es

$$\oint_C F \cdot dr = \frac{1}{3} + 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

3. El rotacional del campo es

$$\operatorname{rot}\left(F\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ y - z & z - x & x - y \end{vmatrix} = \left(-2, -2, -2\right).$$

El teorema de Stokes afirma que $\oint_C F \cdot dr = \iint_S \operatorname{rot}\left(F\right) \cdot n\, dS$, donde C es la curva frontera de S orientada positivamente por n. Calculamos la integral de flujo

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot}\left(F\right) \cdot n\, dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left(-2, -2, -2\right) \cdot \left(-2r^2 \cos\theta, -2r^2 \operatorname{sen}\theta, r\right)\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left[4r^2\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right) - 2r\right]\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\left[\frac{4r^3}{3}\right]_0^1 \left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right) - \left[r^2\right]_0^1\right)\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4}{3}\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right) - 1\right)\, d\theta \\ &= \frac{4}{3}\left[\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\right]_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{2} = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen Final. 4 de Julio de 2002
PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Se considera el recinto plano

$$R := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3,\ \ 0 \leq y \leq \frac{x^3}{3} \right\}.$$

Obtener los volúmenes de los sólidos de revolución V_1, obtenido al girar dicho recinto R alrededor del eje OX, y V_2, obtenido al girar R alrededor de la recta $x = a$, con $a > 3$.

Solución.

Usando el *método de los discos,* el volumen V_1 es

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^3 \left(\frac{x^3}{3} \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \frac{x^6}{9}\, dx \\ &= \pi \left[\frac{x^7}{9 \cdot 7} \right]_0^3 = \pi \frac{3^5}{7} = \frac{243}{7} \pi. \end{aligned}$$

Usando el *método de las capas*, el volumen V_2 es

$$\begin{aligned} V_2 &= 2\pi \int_0^3 (a-x) \frac{x^3}{3}\, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{ax^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 3} \right]_0^3 \\ &= 2\pi \left(\frac{a3^4}{4 \cdot 3} - \frac{3^5}{5 \cdot 3} \right) \\ &= 2\pi 3^3 \left(\frac{a}{4} - \frac{3}{5} \right) \\ &= 2\pi 3^3 \left(\frac{5a - 12}{20} \right) \\ &= \frac{27\,(5a-12)}{10} \pi. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Calcular la integral

$$\int_b^\infty \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}$$

para los valores de a y b, con $a+b>0$, que la hagan convergente.

Solución.

En $x=-a$ y $x=b$, el integrando no está definido. Sabemos que $b>-a$, luego $-a \notin [b,\infty)$ por lo que la integral no es impropia en $x=-a$.

En primer lugar, consideramos las integrales impropias

$$I_1 = \int_b^{b+1} \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}, \quad I_2 = \int_{b+1}^\infty \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}.$$

Para analizar la convergencia de I_1, calculamos

$$\lim_{x\to b^+} \frac{\dfrac{1}{(x+a)\sqrt{x-b}}}{\dfrac{1}{(x-b)^p}} = \lim_{x\to b^+} \frac{(x-b)^p}{(x+a)\sqrt{x-b}} = \frac{1}{a+b} > 0,$$

si $p=1/2$. Entonces, I_1 es convergente porque la integral

$$\int_b^{b+1} \frac{dx}{\sqrt{x-b}}$$

es convergente.

Para analizar la convergencia de I_2, calculamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(x+a)\sqrt{x-b}}}{\dfrac{1}{x^p}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{(x+a)\sqrt{x-b}} = 1,$$

si $p=3/2>1$. En consecuencia, I_2 es convergente y la integral I_1+I_2 converge para todos los valores de a y b, tales que $a+b>0$.

Para calcular la integral, usamos el cambio de variable $x - b = t^2$, con $t > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_b^{\infty} \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}} &= \lim_{k\to\infty} \int_b^k \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_0^{\sqrt{k-b}} \frac{2t}{(a+b+t^2)\,t}\,dt.\end{aligned}$$

Dado que $a + b > 0$, elegimos c tal que $a + b = c^2$ y calculamos

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \int_0^{\sqrt{k-b}} \frac{2\,dt}{(a+b+t^2)} &= \frac{2}{c} \lim_{k\to\infty} \int_0^{\sqrt{k-b}} \frac{1/c}{1+\left(\frac{t}{c}\right)^2}\,dt \\ &= \frac{2}{c} \lim_{k\to\infty} \left[\arctan\left(\frac{t}{c}\right)\right]_0^{\sqrt{k-b}} \\ &= \frac{2}{c} \lim_{k\to\infty} \arctan\left(\frac{\sqrt{k-b}}{c}\right) \\ &= \frac{2}{c}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{a+b}}.\end{aligned}$$

Ejercicio 3. Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,(n+2)}.$$

Obtener su intervalo de convergencia, analizando el comportamiento en los extremos. Calcular su función suma en el interior de dicho dominio.

Indicación: Para determinar la suma, descomponer en fracciones simples el coeficiente del término general.

Solución. El radio de convergencia de la serie de potencias es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,(n+3)}{n\,(n+2)} = 1.$$

En el extremo $x = 1$, la serie tiene el mismo carácter que la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Entonces, la serie en el extremo $x = -1$ converge absolutamente y el intervalo de convergencia es $[-1, 1]$.

Para calcular la suma de la serie en los puntos $|x| < 1$, descomponemos

$$\frac{1}{n\,(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} \Longrightarrow 1 = (A+B)\,n + 2A \Longrightarrow A = \frac{1}{2},\ \ B = -\frac{1}{2}.$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} \right).$$

Sabemos que la suma de la serie geométrica es

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \quad -1 < t < 1.$$

Si $x \in [0, 1)$ entonces integrando en el intervalo $[0, x]$, obtenemos

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x t^n \, dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} \, dt = -\ln(1-x).$$

Si $x \in (-1, 0]$ entonces integrando en el intervalo $[x, 0]$, obtenemos

$$\int_x^0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_x^0 \frac{1}{1-t}\, dt = \int_0^{-x} \frac{1}{1+u}\, du = \ln(1-x).$$

En consecuencia, para todo $x \in (-1, 1)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x).$$

Sea $x \in (-1, 1)$ tal que $x \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} &= \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \\
&= \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots \right) \\
&= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2} \right) \\
&= \frac{1}{x^2} \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, la suma de la serie, para $x \in (-1, 1)$ tales que $x \neq 0$, es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} - \ln(1-x) \right).$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 4 de Julio de 2002

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 4. Se considera la ecuación de ondas $w_{tt} = c^2 w_{xx}$, donde c es una constante real y la función incógnita es $w = w(x,t)$. Transformarla mediante el cambio de variables $u = x + ct$, $v = x - ct$. Integrar la ecuación que resulta para $w(u,v)$ y probar que

$$w(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct),$$

donde f y g son funciones arbitrarias.

Solución. Usando la regla de la cadena para derivar, obtenemos

$$\begin{aligned} w_t &= cw_u - cw_v, \\ w_x &= w_u + w_v. \end{aligned}$$

Derivando de nuevo las anteriores ecuaciones

$$\begin{aligned} w_{tt} &= c^2 (w_{uu} - 2w_{uv} + w_{vv}), \\ w_{xx} &= w_{uu} + 2w_{uv} + w_{vv}. \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación de ondas $w_{tt} = c^2 w_{xx}$ se transforma en

$$c^2 (w_{uu} - 2w_{uv} + w_{vv}) = c^2 (w_{uu} + 2w_{uv} + w_{vv}),$$

que equivale a $4w_{uv} = 0$. Por tanto, la ecuación transformada es

$$w_{uv}(u,v) = 0.$$

Integrando respecto a v, obtenemos $w_u = F(u)$. Integrando esta última ecuación respecto a u, se tiene $w(u,v) = f(u) + g(v)$, donde $f'(u) = F(u)$. En consecuencia, queda probado que

$$w(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct).$$

Ejercicio 5. Obtener los extremos absolutos de la función $f(x, y) = xy$ en el recinto

$$R := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Solución. Para obtener los puntos críticos del interior de R, resolvemos el sistema $\nabla f(x, y) = (y, x) = (0, 0)$, obteniendo el punto $P_1 = (0, 0)$. La matriz hessiana es

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que el punto P_1 es un punto de silla porque $\det H = -1 < 0$.

La frontera de R se define con la restricción $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$. Usando el criterio de los multiplicadores de Lagrange, determinamos los puntos solución del sistema $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, resolviendo

$$\begin{cases} y = 8\lambda x, \\ x = 2\lambda y, \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por x y la segunda por y, obtenemos

$$8\lambda x^2 = 2\lambda y^2 \Longleftrightarrow \lambda \left(4x^2 - y^2\right) = 0.$$

Entonces $\lambda = 0$, o bien $4x^2 = y^2$. Si $\lambda = 0$ tenemos que $x = y = 0$ no satisface la tercera ecuación, por lo que $4x^2 = y^2$. Sustituyendo en la tercera ecuación, $2y^2 = 4$, luego $y = \pm\sqrt{2}$. Por tanto $4x^2 = 2$, lo que implica que $x = \pm 1 \big/ \sqrt{2}$. Así, hemos obtenido en la frontera de R los puntos

$$P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \; P_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right),$$
$$P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \; P_5 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right).$$

Los valores de la función en dichos puntos son

$$f(P_2) = f(P_5) = 1, \quad f(P_3) = f(P_4) = -1.$$

Entonces, el máximo absoluto se alcanza en P_2 y P_5, mientras que el mínimo absoluto se alcanza en P_3 y P_4.

Ejercicio 6. Sea S la superficie formada por las cinco caras superiores del cubo

$$0 \leq x \leq 1, \;\; 0 \leq y \leq 1, \;\; 0 \leq z \leq 1.$$

Sea F el campo vectorial $F(x, y, z) = (xy, 0, -z^2)$. Hallar

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS,$$

donde n representa el vector normal exterior al cubo.

Solución. Sea T la cara inferior del cubo $V = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. El teorema de la divergencia de Gauss afirma que *el flujo de salida de un campo a través de* $S \cup T$ *coincide con la integral triple de la divergencia del campo*, es decir

$$\iint_{S \cup T} \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} (\operatorname{rot} F) \; dx \, dy \, dz = 0,$$

porque $\operatorname{div} (\operatorname{rot} F) = 0$. Entonces

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = -\iint_T \operatorname{rot} F \cdot n \, dS.$$

A continuación, calculamos el rotacional del campo F,

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ xy & 0 & -z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, -x).$$

Una parametrización de T es

$$T(x, y) = (x, y, 0), \;\; 0 \leq x \leq 1, \;\; 0 \leq y \leq 1,$$

y el correspondiente vector normal exterior a T es $n = (0, 0, -1)^T$. Entonces

$$\iint_T \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \int_0^1 \int_0^1 x \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{1}{2} \, dy = \frac{1}{2},$$

lo que implica que

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = -\frac{1}{2}.$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 4 de Febrero de 2002

Ejercicio 1. Se considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\frac{|x|}{e^{|x-1|}}.$$

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de dicha función.

2. Determinar sus extremos absolutos.

3. Calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ si es convergente.

Solución. 1. La función f es

$$f(x)=\begin{cases} -xe^{x-1} & \text{si } x<0, \\ xe^{x-1} & \text{si } 0\le x<1, \\ xe^{1-x} & \text{si } x\ge 1. \end{cases}$$

En primer lugar, calculamos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(-xe^{x-1}\right)=0=\lim_{x\to 0^+} xe^{x-1}=\lim_{x\to 0^+} f(x),$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} xe^{x-1}=1=\lim_{x\to 1^+} xe^{1-x}=\lim_{x\to 1^+} f(x).$$

Entonces, f es continua en $\mathbb{R}$. La función derivada f' en $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ es

$$f'(x)=\begin{cases} -(1+x)\,e^{x-1} & \text{si } x<0, \\ (1+x)\,e^{x-1} & \text{si } 0<x<1, \\ (1-x)\,e^{1-x} & \text{si } x>1. \end{cases}$$

En los puntos $x=0$ y $x=1$, calculamos las respectivas derivadas laterales

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-he^{h-1}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\left(-e^{h-1}\right)=-\frac{1}{e},$$
$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{he^{h-1}}{h}=\lim_{h\to 0+} e^{h-1}=\frac{1}{e},$$
$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)\,e^{h}-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)\,e^{h}+e^{h}}{1}=2,$$
$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)\,e^{-h}-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(1+h)\,e^{-h}+e^{-h}}{1}=0.$$

Como $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ y $f'_-(1)\neq f'_+(1)$, la función f no es derivable en $\{0,1\}$.

2. Los puntos críticos de f son $0,1$ y los puntos tales que $f'(x)=0$. Si $x<0$ entonces $f'(x)=-(1+x)\,e^{x-1}=0$ implica $x=-1<0$. Si $x\in(0,1)$ entonces $f'(x)=(1+x)\,e^{x-1}=0$ implica que $x=-1$ que no pertenece al intervalo $(0,1)$. Si $x>1$ entonces $f'(x)=(1-x)\,e^{1-x}=0$ implica que $x=1$ que no pertenece al

intervalo $(1,\infty)$. Por tanto, el único punto con derivada nula es $x=-1$. Los valores de la función en los tres puntos críticos son $f(-1)=\dfrac{1}{e^2}$, $f(0)=0$ y $f(1)=1$. Entonces, f alcanza su mínimo en $x=0$ y su máximo en $x=1$.

3. Calculamos la integral

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}\left(-xe^{x-1}\right)dx+\int_0^1 xe^{x-1}\,dx+\int_1^{\infty} xe^{1-x}\,dx.$$

Integrando por partes, calculamos las primitivas

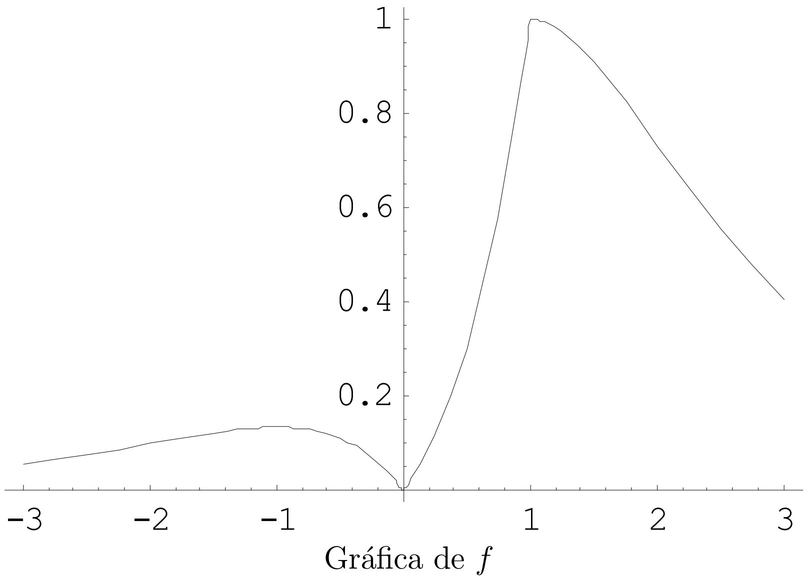
$$\int\left(-xe^{x-1}\right)dx=-xe^{x-1}+e^{x-1}+C=e^{x-1}(1-x)+C,$$
$$\int xe^{1-x}\,dx=-xe^{1-x}-e^{1-x}+C=-e^{1-x}(1+x)+C.$$

Usando el teorema Fundamental de Cálculo, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{0}\left(-xe^{x-1}\right)dx=\lim_{a\to-\infty}\left[e^{x-1}(1-x)\right]_a^0=\frac{1}{e}-\lim_{a\to-\infty}\frac{1-a}{e^{1-a}}=\frac{1}{e}-\lim_{a\to-\infty}\frac{-1}{-e^{1-a}}=\frac{1}{e},$$
$$\int_0^1 xe^{x-1}\,dx=\left[e^{x-1}(x-1)\right]_0^1=-\left(\frac{-1}{e}\right)=\frac{1}{e},$$
$$\int_1^{\infty} xe^{1-x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[-e^{1-x}(1+x)\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\frac{-(1+b)}{e^{b-1}}+2=\lim_{b\to\infty}\frac{-1}{e^{b-1}}+2=2.$$

En consecuencia, la integral es convergente y su valor es

$$I=\frac{2}{e}+2.$$



Gráfica de f

Ejercicio 2. Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$(x-c)^2+y^2=c^2$$

y dibujar varias curvas de ambas familias.

Solución. Las curvas dadas son circunferencias con centro en $(c,0)$ y radio $|c|$. Su ecuación implícita es $0=(x-c)^2+y^2-c^2=x^2-2cx+y^2$. Derivando respecto a x, obtenemos $2x-2c+2yy'=0$. Dado que $2cx=x^2+y^2$, la ecuación diferencial de la familia dada es

$$2x^2-\left(x^2+y^2\right)+2xyy'=0 \Longleftrightarrow y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}.$$

La ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales es

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Esta ecuación es homogénea, luego introducimos la variable $v=y/x$. Derivando $vx=y$, obtenemos

$$v'x+v=y'=\frac{2\,(y/x)}{1-(y/x)^2}=\frac{2v}{1-v^2}.$$

La ecuación para la nueva variable v es

$$v'x=\frac{2v}{1-v^2}-v=\frac{v+v^3}{1-v^2} \Longleftrightarrow \left(\frac{1-v^2}{v+v^3}\right)\frac{dv}{dx}=\frac{1}{x}.$$

Se trata de una ecuación de variables separadas que integramos

$$\int \frac{1-v^2}{v\,(1+v^2)}\,dv=\int \frac{1}{x}\,dx.$$

Para calcular la primera primitiva, descomponemos en fracciones simples

$$\frac{1-v^2}{v\,(1+v^2)}=\frac{A}{v}+\frac{Bv+C}{1+v^2}.$$

La ecuación $1-v^2=A\,(1+v^2)+(Bv+C)\,v=(A+B)\,v^2+Cv+A$ implica que $A+B=-1$, $C=0$, $A=1$, por lo que $B=-2$. En conclusión

$$\frac{1-v^2}{v\,(1+v^2)}=\frac{1}{v}-\frac{2v}{1+v^2}.$$

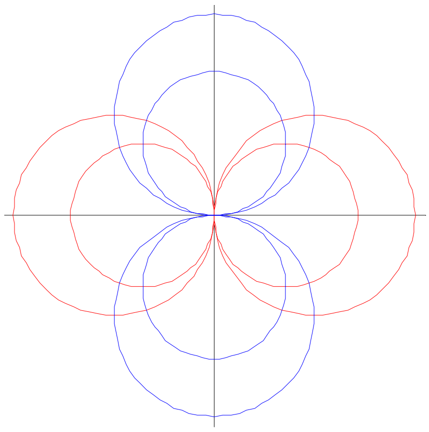
La igualdad entre las primitivas es

$$\begin{aligned}\ln|x|+\ln|C| &= \int \frac{1}{v}\,dv-\int \frac{2v}{1+v^2}\,dv=\ln|v|-\ln\left(1+v^2\right)=\ln\left|\frac{v}{1+v^2}\right| \\ &= \ln\left|\frac{y/x}{1+(y/x)^2}\right|=\ln\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la familia de trayectorias ortogonales verifica

$$|Cx| = \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \Longleftrightarrow x^2+y^2 = 2dy \Longleftrightarrow x^2+(y-d)^2 = d^2,$$

donde $2d = 1/C$. Observemos que las curvas ortogonales son circunferencias con centro en $(0,d)$ y radio $|d|$.



Ejercicio 3. Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n}.$$

Determinar su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su función suma.

Solución. El radio de convergencia de la serie es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^n}{n}}{\dfrac{3^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3},$$

La serie converge absolutamente en el intervalo abierto $|x-2| < \frac{1}{3}$. Estudiamos la convergencia en los puntos terminales $x-2 = -\frac{1}{3}$ y $x-2 = \frac{1}{3}$. En el primero, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

es convergente por el criterio de Leibnitz. En el segundo punto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente por el criterio integral. En consecuencia, la serie es convergente en el intervalo $-\frac{1}{3} \le x-2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{3} \le x < \frac{7}{3}$.

Para sumar la serie, definimos $z = 3(x-2)$. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

para $z \in [-1, 1)$. Sabemos que la suma de la serie geométrica es

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \quad -1 < t < 1.$$

Si $z \in [0, 1)$ entonces integrando en el intervalo $[0, z]$, obtenemos

$$\int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^z t^n \, dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \int_0^z \frac{1}{1-t} \, dt = -\ln(1-z).$$

Si $z \in (-1, 0]$ entonces integrando en el intervalo $[z, 0]$, obtenemos

$$\int_z^0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-z^{n+1}}{n+1} = \int_z^0 \frac{1}{1-t} \, dt = \int_0^{-z} \frac{1}{1+u} \, du = \ln(1-z).$$

En consecuencia, para todo $z \in (-1, 1)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-z),$$

lo que implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n} = -\ln(1 - 3(x-2)) = -\ln(7-3x),$$

para todo

$$\frac{5}{3} < x < \frac{7}{3} \Leftrightarrow 5 < 3x < 7 \Leftrightarrow -7 < -3x < -5 \Leftrightarrow 0 < 7 - 3x < 2.$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 13 de Junio de 2002

Ejercicio 1. Obtener los extremos absolutos y relativos de la función

$$f(x,y) = 3x^2y^2 + 2x^3 + 2y^3,$$

en el conjunto $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Solución. En primer lugar, determinamos los puntos del interior del conjunto R que verifican $\nabla f(x,y) = (6xy^2 + 6x^2, 6x^2y + 6y^2) = (0,0)$, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 6x(y^2 + x) = 0, \\ 6y(x^2 + y) = 0. \end{cases}$$

La primera ecuación implica que $x = 0$ o bien $x = -y^2$. Si $x = 0$, entonces la segunda ecuación implica que $y = 0$. Si $x = -y^2$, la segunda ecuación implica que $y = 0$ o bien $y = -x^2$. En el primer caso, obtenemos $x = 0$ y en el segundo caso

$$x = -y^2 = -x^4 \Longleftrightarrow x\left(x^3 + 1\right) = 0.$$

Las soluciones son $x = 0$ y $x = -1$, con lo que los puntos solución son $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (-1,-1)$.

Calculamos la matriz hessiana

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} \, f_{xy} \\ f_{yx} \, f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y^2 + 12x & 12xy \\ 12xy & 6x^2 + 12y \end{pmatrix}.$$

En los puntos con gradiente nulo, dicha matriz es

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

El criterio del hessiano no decide en P_1 porque el determinante es cero y P_2 es un punto de silla porque $\det H(-1,-1) < 0$. Para analizar el carácter del punto P_1, observando que $f(0,0) = 0$, elegimos $\varepsilon > 0$ y las desigualdades

$$f(-\varepsilon, 0) = -2\varepsilon^3 < f(0,0) < 2\varepsilon^3 = f(\varepsilon, 0)$$

implican que $P_1 = (0,0)$ es un punto de silla.

La frontera de R se define con la restricción $g(x,y) = x^2+y^2-4=0$. Usando el criterio de los multiplicadores de Lagrange, determinamos los puntos solución del sistema $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, resolviendo

$$\begin{cases} 6x\left(y^2+x\right) = 2\lambda x, \\ 6y\left(x^2+y\right) = 2\lambda y, \\ x^2+y^2-4=0. \end{cases}$$

Si $x=0$, entonces $y=\pm 2$. En el caso de que $y=0$, obtenemos $x=\pm 2$. Si ambos son no nulos, entonces el sistema es

$$\begin{cases} 3\left(y^2+x\right) = \lambda, \\ 3\left(x^2+y\right) = \lambda, \\ x^2+y^2-4=0. \end{cases}$$

Igualando las dos primera ecuaciones, obtenemos $y^2+x=x^2+y$, ecuación que es equivalente a $x^2-y^2=x-y$. Por tanto $(x+y)(x-y)=x-y$, luego $x-y=0$ o bien $x+y=1$. En el primer caso, $x=y$ implica $2x^2=4$, luego $x=y=\pm\sqrt{2}$. Si $y=1-x$, entonces

$$x^2+(1-x)^2=4 \Longleftrightarrow 2x^2-2x-3=0 \Longleftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}.$$

Los puntos obtenidos son

$$\begin{aligned} &P_3=(0,2),\ P_4=(0,-2), \\ &P_5=(2,0),\ P_6=(-2,0), \\ &P_7=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\ P_8=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right), \\ &P_9=\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2},\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right),\ P_{10}=\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right). \end{aligned}$$

Los valores de la función en dichos puntos son

$$\begin{gathered} f(0,2)=16,\ f(0,-2)=-16,\ f(2,0)=16,\ f(-2,0)=-16, \\ f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=12+8\sqrt{2},\ f\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=12-8\sqrt{2}, \\ f\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2},\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)=f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)=17.75 \end{gathered}$$

Entonces, el máximo absoluto se alcanza en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ y el mínimo absoluto se alcanza en $(0,-2)$ y $(-2,0)$.

Ejercicio 2. Calcular el área encerrada en el lazo de la lemniscata

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$$

contenido en el semiplano $x \geq 0$,

1. Usando integrales dobles en coordenadas polares.

2. Aplicando el teorema de Green.

Solución. 1. En coordenadas polares $x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta$, la ecuación de la lemniscata es $r^4 = 2a^2r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) = 2a^2r^2\cos 2\theta \Leftrightarrow r^2 = 2a^2\cos 2\theta$, donde $\cos 2\theta \geq 0$ implica que $2\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, por lo que $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$. En el semiplano positivo, la ecuación del lazo es $r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$, $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ y el recinto que encierra dicho lazo es

$$D = \left\{(r,\theta) : -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq r \leq a\sqrt{2\cos 2\theta}\right\}.$$

Calculamos el área

$$\begin{aligned}
\acute{a}rea\,(D) &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos 2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\operatorname{sen} 2\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a^2.
\end{aligned}$$

2. El teorema de Green implica que $\acute{a}rea\,(D) = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$, donde la curva $C : [-\pi/4, \pi/4] \to \mathbb{R}^2$ está parametrizada por

$$\begin{cases} x\,(\theta) = r\cos\theta = a\sqrt{2\cos 2\theta}\cos\theta, \\ y\,(\theta) = r\operatorname{sen}\theta = a\sqrt{2\cos 2\theta}\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

Para obtener la integral de línea, calculamos

$$\begin{aligned}
x'\,(\theta) &= \frac{-2a\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}\cos\theta - a\sqrt{2\cos 2\theta}\operatorname{sen}\theta, \\
y'\,(\theta) &= \frac{-2a\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}\operatorname{sen}\theta + a\sqrt{2\cos 2\theta}\cos\theta.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\acute{a}rea\,(D) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(xy' - yx'\right)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2a^2\cos 2\theta\,d\theta = a^2.$$

Ejercicio 3. Sea Ω el sólido comprendido en el interior de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

que es exterior al cono $(z-1)^2 = x^2 + y^2$. Sea S_1 la parte de la frontera de Ω correspondiente a la esfera y S_2 la parte de la frontera de Ω correspondiente al cono.

1. Obtener el área de la superficie $S = S_1 \cup S_2$, frontera de Ω, parametrizando S_1 y S_2.

2. Calcular el flujo de salida del campo $F(x, y, z) = (x - z, y - z, z)$ a través de la frontera S del sólido Ω, directamente y utilizando el teorema de Gauss.

Solución. La intersección de la esfera y el cono verifica

$$(z-1)^2 + z^2 = 1 \Longrightarrow 2z(z-1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} z = 0, & x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1, & x = y = 0. \end{cases}$$

Entonces el sólido es

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1, \ \ (z-1)^2 \le x^2 + y^2 \le 1 - z^2 \right\}.$$

1. La parametrización de S_1 con *coordenadas esféricas* es

$$S_1(\phi, \theta) = (\operatorname{sen}\phi \cos\theta, \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \cos\phi), \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}, \ \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental es

$$\begin{aligned} (S_1)_\phi \times (S_1)_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi \operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi\cos\phi\right). \end{aligned}$$

Para calcular el área, obtenemos

$$\left\| (S_1)_\phi \times (S_1)_\theta \right\| = \sqrt{\operatorname{sen}^4\phi + \operatorname{sen}^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = \operatorname{sen}\phi,$$

porque $\operatorname{sen}\phi \ge 0$ en el intervalo $[0, \pi/2]$. Entonces, el área de S_1 es

$$\acute{a}rea\,(S_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta = 2\pi \left[-\cos\phi \right]_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

En el cono, las *coordenadas cilíndricas* $x = r\cos t$, $y = r\,\mathrm{sen}\, t$, implican que

$$(z-1)^2 = r^2 \Longrightarrow z-1 = \pm r \Longrightarrow z = 1 \pm r.$$

Dado que $0 \le z \le 1$, eligiendo $z = 1 - r$ tenemos que $0 \le r \le 1$. Entonces, la parametrización de S_2 es

$$S_2(r,t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\, t, 1-r), \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental es

$$(S_2)_r \times (S_2)_t = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t & \mathrm{sen}\, t & -1 \\ -r\,\mathrm{sen}\, t & r\cos t & 0 \end{vmatrix} = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\, t, r).$$

A continuación, calculamos

$$\|(S_2)_r \times (S_2)_t\| = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}.$$

Entonces, el área de S_2 es

$$\text{\it área}\,(S_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{2}\, dr\, dt = 2\pi\sqrt{2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi\sqrt{2}.$$

En consecuencia, el $\text{\it área}\,(S) = 2\pi + \pi\sqrt{2} = \pi\left(2 + \sqrt{2}\right)$.

2. El flujo de salida del campo $F(x,y,z) = (x-z, y-z, z)$ a través de S es

$$\iint_S F \cdot n\, dS = \iint_{S_1} F \cdot n\, dS + \iint_{S_2} F \cdot n\, dS.$$

En el punto $S_1(\pi/2, 0) = (1,0,0)$ el producto vectorial fundamental

$$\left((S_1)_\phi \times (S_1)_\theta\right)(\pi/2, 0) = (1,0,0)$$

tiene la dirección exterior. El producto escalar $F[S_1(\phi,\theta)] \cdot \left((S_1)_\phi \times (S_1)_\theta\right) =$

$$(\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta - \cos\phi, \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta - \cos\phi, \cos\phi) \cdot \left(\mathrm{sen}^2\phi\cos\theta, \mathrm{sen}^2\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \mathrm{sen}\,\phi\cos\phi\right)$$
$$= \mathrm{sen}^3\phi\left(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta\right) - \mathrm{sen}^2\phi\cos\phi\,(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta) + \mathrm{sen}\,\phi\cos^2\phi$$
$$= \mathrm{sen}\,\phi - \mathrm{sen}^2\phi\cos\phi\,(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta).$$

El flujo exterior a través de S_1 es

$$\iint_{S_1} F \cdot n\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\mathrm{sen}\,\phi - \mathrm{sen}^2\phi\cos\phi\,(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\right] d\phi\, d\theta$$

$$= 2\pi\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{2\pi} \left[\frac{\mathrm{sen}^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/2} (\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta$$

$$= 2\pi - \frac{1}{3}\left[\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

En el punto $S_2\,(1,0) = (1,0,0)$ el producto vectorial fundamental

$$\left((S_2)_r \times (S_2)_t\right)(1,0) = (1,0,1)$$

tiene la dirección *interior al sólido* Ω. Calculamos el producto escalar

$$\begin{aligned}
F\,[S_2\,(r,t)] \cdot \left((S_2)_r \times (S_2)_t\right) &= (r\cos t - 1 + r, r\operatorname{sen} t - 1 + r, 1 - r) \cdot (r\cos t, r\operatorname{sen} t, r) \\
&= r^2 \left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right) + r\,(r-1)\,(\cos t + \operatorname{sen} t) + r - r^2 \\
&= r\,(r-1)\,(\cos t + \operatorname{sen} t) + r.
\end{aligned}$$

El flujo exterior a través de S_2 es

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} F \cdot n\, dS &= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} [r + r\,(r-1)\,(\cos t + \operatorname{sen} t)]\; dt\, dr \\
&= -\frac{2\pi}{2} - \int_0^1 r\,(r-1)\,[\operatorname{sen} t - \cos t]_0^{2\pi}\; dr \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

En consecuencia, el flujo exterior a través de S es π.

El teorema de la divergencia de Gauss afirma que *el flujo de salida de F a través de S coincide con la integral triple de la divergencia de F*, es decir

$$\iint_S F \cdot n\, dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}(F)\; dx\, dy\, dz.$$

Dado que $\operatorname{div}(F) = F_x + F_y + F_z = 3$, tenemos que

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(F)\; dx\, dy\, dz = 3 \operatorname{vol}(\Omega) = 3 \int_0^1 A\,(z)\; dz,$$

donde $A\,(z)$ es el área del anillo circular de radio menor $z-1$ y radio mayor $\sqrt{1-z^2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
3 \int_0^1 A\,(z)\; dz &= 3 \int_0^1 \pi \left(1 - z^2 - (z-1)^2\right)\; dz \\
&= 6\pi \int_0^1 \left(z - z^2\right)\; dz = 6\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen 3 de Septiembre de 2001

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Dadas las rectas $y = x,\ y = ax,\ y = 1 - ax$, con $a \geq 1$, se pide:

(a) Determinar, en función de a, el área de la región limitada por las tres rectas.

(b) Calcular los valores de $a \in [1, \infty)$ que hacen el área máxima o mínima.

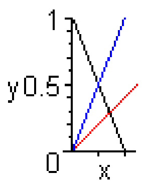
Sea $F : \left[0, \dfrac{1}{a+1}\right] \to \mathbb{R}$ la función que asigna a cada número $z \in \left[0, \dfrac{1}{a+1}\right]$ el área $F(z)$ del trozo de la región del apartado (a) comprendido entre las rectas $x = 0$ y $x = z$.

(c) Justificar la existencia de $F'(z)$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{1}{a+1}\right]$. Calcular $F'(z)$.

(d) ¿Es derivable la función $F'(z)$ en todos los puntos de su dominio?

Solución.

(a) La región determinada por las tres rectas es el triángulo cuyos vértices son el origen y los puntos donde se cortan las rectas $y = ax,\ y = x$ con $y = 1 - ax$.



Para obtener un punto, resolvemos $ax = 1 - ax$, obteniendo $2ax = 1$, por lo que sus coordenadas son
$$x = \frac{1}{2a},\quad y = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$
El otro punto se obtiene a partir de $x = 1 - ax$, siendo sus coordenadas
$$x = \frac{1}{a+1} = y.$$

El área del triángulo, con $a \geq 1$, es

$$\begin{aligned}
A(a) &= \int_0^{1/2a} (ax - x)\, dx + \int_{1/2a}^{1/(a+1)} (-ax + 1 - x)\, dx \\
&= (a-1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2a} + \left[x - (a+1)\frac{x^2}{2}\right]_{1/2a}^{1/(a+1)} \\
&= \frac{a-1}{8a^2} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2(a+1)} - \frac{1}{2a} + \frac{a+1}{8a^2} \\
&= \frac{1}{4a} + \frac{1}{2(a+1)} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2(a+1)} - \frac{1}{4a} \\
&= \frac{4a - 2(a+1)}{8a(a+1)} = \frac{2a-2}{8a(a+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{a-1}{a(a+1)}\right).
\end{aligned}$$

(b) Para calcular los puntos críticos, resolvemos

$$A'(a) = \frac{1}{4}\left(\frac{a(a+1) - (a-1)(2a+1)}{a^2(a+1)^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{-a^2 + 2a + 1}{a^2(a+1)^2}\right) = 0.$$

Esta ecuación es equivalente a $a^2 - 2a - 1 = 0$, cuyas raíces son

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

La raíz $1 - \sqrt{2}$ no pertenece al intervalo $(1, \infty)$, por lo que el único punto crítico en dicho intervalo es $a = 1 + \sqrt{2}$. Dado que $A'(a) > 0$ si $1 < a < 1 + \sqrt{2}$ y $A'(a) < 0$ si $a > 1 + \sqrt{2}$, podemos concluir que en $a = 1 + \sqrt{2}$ el área es máxima. Además, tenemos que $A(1) = 0$, luego en $a = 1$ el área es mínima.

(c) El área del trozo del triángulo comprendido entre las rectas $x = 0$ y $x = z$, es

$$F(z) = \begin{cases} \int_0^z (at - t)\, dt, & \text{si } 0 \leq z \leq \frac{1}{2a}, \\ \frac{a-1}{8a^2} + \int_{1/2a}^z (-at + 1 - t)\, dt, & \text{si } \frac{1}{2a} \leq z \leq \frac{1}{a+1}. \end{cases}$$

El Teorema Fundamental del Cálculo asegura que si $z \in \left[0, \dfrac{1}{a+1}\right]$,

$$F'(z) = \begin{cases} az - z, & \text{si } 0 \leq z \leq \frac{1}{2a}, \\ -az + 1 - z, & \text{si } \frac{1}{2a} \leq z \leq \frac{1}{a+1}. \end{cases}$$

(d) La función $F'(z)$ es derivable en $\left[0, \dfrac{1}{2a}\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{2a}, \dfrac{1}{a+1}\right]$ y su valor es

$$F''(z) = \begin{cases} a - 1, & \text{si } 0 \leq z < \frac{1}{2a}, \\ -a - 1, & \text{si } \frac{1}{2a} < z \leq \frac{1}{a+1}. \end{cases}$$

En el punto $z = \dfrac{1}{2a}$, la función $F'(z)$ no es derivable porque la derivada por la izquierda es $a - 1$ y la derivada por la derecha es $-a - 1$, valores que coinciden si y sólo si $a = 0$.

Ejercicio 2. Se considera la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(n+1)\,2^n}-\frac{n}{3^n}\right)x^n.$$

Obtener su dominio de convergencia y su suma en dicho dominio.

Solución. Consideramos las series de potencias

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\,2^n}x^n,\quad S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^n.$$

Los radios de convergencia de estas series son

$$R_1=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\,2^{n+1}}{(n+1)\,2^n}=2,$$
$$R_2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}\frac{3^{n+1}}{n+1}=3.$$

Entonces el radio de convergencia de la serie es $R=\min\{2,3\}=2$. En el punto $x=-2$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)}-n\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)$$

es divergente porque es la diferencia de una serie divergente y otra convergente. En el punto $x=2$, tenemos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(n+1)}-n\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

converge porque es la diferencia de una serie alternada convergente y una serie convergente. En consecuencia, la serie es convergente en el conjunto $(-2,2]$.

Sabemos que $S(x)=S_1(x)-S_2(x)$ para todo $x\in(-2,2]$, donde

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{-x}{2}\right)^n,\quad S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

A partir de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{2}{2+x},$$

integrando obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2}{(n+1)}\left(\frac{-x}{2}\right)^{n+1}=2\int_0^x\frac{1}{2+t}\,dt=2\left[\ln(2+x)-\ln(2)\right]=2\ln\left(\frac{2+x}{2}\right).$$

Entonces,

$$2\ln\left(\frac{2+x}{2}\right)=(-2)\left(\frac{-x}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{-x}{2}\right)^{n}=xS_1\left(x\right).$$

A partir de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{3}{3-x},$$

derivando obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{\left(3-x\right)^{2}},$$

lo que implica que

$$\frac{3x}{\left(3-x\right)^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{x}{3}\right)^{n}=S_2\left(x\right).$$

Finalmente,

$$S(x)=S_1\left(x\right)-S_2\left(x\right)=\frac{2}{x}\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\frac{3x}{\left(3-x\right)^{2}}.$$

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen 3 de Septiembre de 2001
SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Se considera la superficie

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 3 \right\}.$$

Obtener el plano tangente a dicha superficie en el punto $(1,2,3)$.
Encontrar el punto de S para el que se hace mínima la suma de las coordenadas $f(x,y,z) = x + y + z$, obteniendo dicho valor.

Solución.

La ecuación implícita de la superficie es

$$F(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} - 3 = 0.$$

Calculamos las derivadas parciales $F_x = -x^{-2},\ F_y = -2y^{-2},\ F_z = -3z^{-2}$, luego

$$F_x(1,2,3) = -1,\ \ F_y(1,2,3) = -\frac{1}{2},\ \ F_z(1,2,3) = -\frac{1}{3}.$$

Por tanto, el plano tangente a S en el punto $(1,2,3)$ es

$$-(x-1) - \frac{1}{2}(y-2) - \frac{1}{3}(y-3) = 0 \Longleftrightarrow x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 3.$$

Debemos resolver el problema

$$\begin{gathered} \min f(x,y,z) \\ \text{sujeto } \ g(x,y,z) = 0, \end{gathered}$$

donde $f(x,y,z) = x + y + z$ y $g(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} - 3$. El teorema de los multiplicadores de Lagrange asegura que en el punto de S en el se alcanza un extremo para f existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que se verifica la ecuación $\nabla f = \lambda \nabla g$. Entonces

$$(1,1,1) = \lambda \left(-\frac{1}{x^2}, -\frac{2}{y^2}, -\frac{3}{z^2} \right),$$

lo que implica

$$x^2 = -\lambda,\ \ \frac{y^2}{2} = -\lambda,\ \ \frac{z^2}{3} = -\lambda.$$

Por lo tanto
$$x^2 = \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{3},$$
luego tenemos que $y^2 = 2x^2,\ z^2 = 3x^2$. En consecuencia
$$y = x\sqrt{2}, \quad z = x\sqrt{3},$$
porque $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$. La ecuación $g(x, y, z) = 0$ implica que
$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x\sqrt{2}} + \frac{3}{x\sqrt{3}} = 3 \Longleftrightarrow \frac{1}{x}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right) = 3,$$
por lo que las coordenadas del extremo condicionado son
$$x^* = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right),\ y^* = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right),\ z^* = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right).$$

La suma de las coordenadas en este punto es
$$f(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2.$$

En el punto $(1, 2, 3) \in S$ la función
$$f(1, 2, 3) = 6 > \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2,$$
luego el extremo condicionado obtenido es un mínimo.

Ejercicio 4. Se considera el sólido V limitado en el primer octante por la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 5$. Calcular el flujo de salida del campo vectorial $F(x, y, z) = (2y, zy, 3z)$ a través de la frontera S del sólido V, directamente y usando el teorema de Gauss.

Solución. El teorema de la divergencia de Gauss afirma que *el flujo de salida de F a través de S coincide con la integral triple de la divergencia de F*, es decir

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz,$$

donde V es el sólido dado. Para calcular la integral triple, usaremos coordenadas cilíndricas (r, θ, z). Las ecuaciones del cambio de coordenadas son

$$x = r\cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\theta, \quad z = z,$$

donde $0 \leq r, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$, y el determinante jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r.$$

Entonces, $V = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 2, \ 0 \leq \theta \leq \pi/2, \ 0 \leq z \leq 5\}$. Dado que $\operatorname{div}(F) = z + 3$, el flujo de salida de F a través de S es

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^5 (z+3) \, r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 \left[\frac{z^2}{2} + 3z\right]_0^5 \\ &= \pi \left(\frac{25}{2} + 15\right) = \frac{55\pi}{2}. \end{aligned}$$

Para calcular el flujo a través de la frontera S, calculamos el flujo a través de las cinco superficies siguientes:

1. La superficie cilíndrica, parametrizada por $S(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z)$, donde $0 \leq \theta \leq \pi/2, \ 0 \leq z \leq 5$. El producto vectorial fundamental es

$$S_\theta \times S_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2\operatorname{sen}\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0).$$

En el punto $S(0, 1) = (2, 0, 1)$, el vector $S_\theta \times S_z(0, 1) = (2, 0, 0)$ apunta hacia el exterior de V, luego la normal exterior tiene el mismo sentido que $S_\theta \times S_z$.

Calculamos

$$\begin{aligned}F\left(S\left(\theta,z\right)\right)\cdot\left(S_\theta\times S_z\right) &= \left(4\operatorname{sen}\theta, 2z\operatorname{sen}\theta, 3z\right)\cdot\left(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0\right)\\ &= 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 4z\operatorname{sen}^2\theta\\ &= 4\left(\operatorname{sen}2\theta + z\operatorname{sen}^2\theta\right).\end{aligned}$$

Entonces, el flujo de F a través de esta superficie es

$$\begin{aligned}\iint\limits_S F\cdot n\,dS &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^5\left(\operatorname{sen}2\theta + z\operatorname{sen}^2\theta\right)\,dz\,d\theta\\ &= 4\int_0^{\pi/2}\left(5\operatorname{sen}2\theta + \frac{25}{2}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\right)\,d\theta\\ &= 20\left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} + 50\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}\\ &= 20\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + 50\frac{\pi}{4}\\ &= 20 + \frac{25\pi}{2}.\end{aligned}$$

2. El rectángulo contenido en el plano $y = 0$, parametrizado mediante $S\left(x,z\right) = \left(x,0,z\right)$, donde $0 \le x \le 2,\ 0 \le z \le 5$. El producto vectorial

$$S_x\times S_z = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \left(0,-1,0\right),$$

tiene el mismo sentido que la normal exterior. El flujo de F es

$$\iint\limits_S F\cdot n\,dS = \int_0^2\int_0^5\left(0,0,3z\right)\cdot\left(0,-1,0\right)\,dz\,dx = 0.$$

3. El rectángulo contenido en el plano $x = 0$, parametrizado mediante $S\left(y,z\right) = \left(0,y,z\right)$, donde $0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 5$. El producto vectorial

$$S_y\times S_z = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \left(1,0,0\right),$$

tiene sentido opuesto a la normal exterior. El flujo de F es

$$\begin{aligned}\iint\limits_S F\cdot n\,dS &= -\int_0^2\int_0^5\left(2y,zy,3z\right)\cdot\left(1,0,0\right)\,dz\,dy\\ &= -\int_0^2\int_0^5 2y\,dz\,dy = -5\left[y^2\right]_0^2 = -20.\end{aligned}$$

4. El sector circular contenido en el plano $z = 0$, parametrizado mediante $S(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 0)$, donde $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi/2$. El producto vectorial

$$S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r),$$

tiene sentido opuesto a la normal exterior. El flujo de F es

$$\iint_S F \cdot n \, dS = -\int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2r\operatorname{sen}\theta, 0, 0) \cdot (0, 0, r) \; dr \, d\theta = 0.$$

5. El sector circular contenido en el plano $z = 5$, parametrizado mediante $S(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 5)$, donde $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi/2$. El producto vectorial

$$S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r),$$

tiene el mismo sentido que la normal exterior. El flujo de F es

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n \, dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2r\operatorname{sen}\theta, 5r\operatorname{sen}\theta, 15) \cdot (0, 0, r) \; dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 15r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2} \left[\frac{15r^2}{2} \right]_0^2 = 15\pi. \end{aligned}$$

En consecuencia, el flujo de F a través de la frontera de V viene dado por la suma de los cinco flujos anteriores,

$$\iint_S F \cdot n \, dS = 20 + \frac{25\pi}{2} - 20 + 15\pi = \frac{55\pi}{2}.$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 5 de Julio de 2003

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Analizar la concavidad y convexidad, obtener los puntos de inflexión y esbozar la gráfica de $y = e^{-x^2}$. Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene su base en el eje OX y dos vértices en la gráfica de $y = e^{-x^2}$.

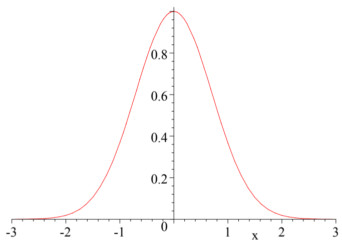
Solución. Para determinar los dominios de concavidad y convexidad, calculamos

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = -2\left(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}\right) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right).$$

Dado que $2e^{-x^2} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$y'' > 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - 1 > 0 \Longleftrightarrow x^2 > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow |x| > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En consecuencia, la gráfica es convexa en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. De manera análoga, obtenemos que $y'' < 0 \Longleftrightarrow |x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, por lo que la gráfica es cóncava en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Los puntos de inflexión son las soluciones de $y'' = 0$, es decir $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.



El rectángulo tiene dos vértices en el eje OX y dos vértices en la gráfica de la curva. Como dicha gráfica es simétrica respecto al eje OY, tenemos que las coordenadas de los vértices en el eje OX deben ser $(-x, 0)$ y $(x, 0)$, donde $x \in (0, \infty)$. Los otros dos vértices son $\left(-x, e^{-x^2}\right)$ y $\left(x, e^{-x^2}\right)$. Entonces, el área del rectángulo es $A(x) = 2xe^{-x^2}$, donde $x \in (0, \infty)$. Calculamos los puntos críticos, resolviendo $A'(x) = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. En el intervalo $(0, \infty)$ el único punto crítico es $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y dado que $A'(x) > 0$ si $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $A'(x) < 0$ si $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, el punto crítico es un máximo. En consecuencia, el rectángulo de área máxima tiene base $\sqrt{2}$ y altura $e^{-1/2}$.

Ejercicio 2. Se consideran las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p} (x-2)^n, \quad p \geq 0.$$

1. Determinar su radio y dominio de convergencia según los valores de p.

2. Para el caso $p = 1$, obtener la suma de la serie en el interior del intervalo de convergencia.

Solución. El radio de convergencia de la serie de potencias es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^p}{(n+1)^p} = 1,$$

para cualquier $p \geq 0$, por lo que las series son convergentes al menos en $(1, 3)$.

Si $p = 0$, la serie en el punto $x = 1$ tiene término general $a_n = 1$, para todo $n \geq 0$, luego es divergente. En $x = 3$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ no cumple la condición necesaria de convergencia. Entonces, el dominio de convergencia es $(1, 3)$.

Si $0 < p \leq 1$, en el punto $x = 1$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

es una p-serie divergente. En el punto $x = 3$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$ converge debido al criterio de Leibniz para series alternadas. Por ello, el dominio de convergencia es $(1, 3]$.

Si $p > 1$, en el punto $x = 1$, la serie es una p-serie convergente, por lo que también converge en $x = 3$. En este caso, el dominio de convergencia es $[1, 3]$.

Para calcular la suma de la serie para $p = 1$, definimos $z = x - 2$. Integrando la suma de la serie geométrica

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad -1 < t < 1,$$

obtenemos

$$\int_0^z \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^z (-1)^n t^n\, dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}.$$

En consecuencia, la suma de la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n = \frac{\ln(1+z)}{z} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-2)^n = \frac{\ln(x-1)}{x-2},$$

para todo $x \in (1, 3)$ con $x \neq 2$.

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen Final. 5 de Julio de 2003
SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Calcular el volumen del sólido interior al cilindro $x^2+y^2=2ax$, que está comprendido entre el plano $z=0$ y la parte superior del cono $x^2+y^2=z^2$.

Solución. Usando coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z,$$

la ecuación del cilindro es $r^2 = 2ar\cos\theta \Longleftrightarrow r = 2a\cos\theta$, donde $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. El interior del cilindro verifica $0 \leq r \leq 2a\cos\theta$. La ecuación de la parte superior del cono es $z = r$, por lo que $0 \leq z \leq r$. Entonces, el sólido

$$V = \left\{(r,\theta,z) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \ 0 \leq r \leq 2a\cos\theta,\ \ 0 \leq z \leq r\right\}.$$

Como el jacobiano del cambio de coordenadas es r, el volumen es

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}\,(V) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta}\int_0^r r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2a\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{8a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{8a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\mathrm{sen}^2\,\theta\right)\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{8a^3}{3}\left[\mathrm{sen}\,\theta - \frac{\mathrm{sen}^3\,\theta}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{8a^3}{3}\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{32a^3}{9}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Sea C la curva intersección del plano $y+\sqrt{2}z=0$ con el elipsoide $x^2+\frac{1}{2}y^2+z^2=1$, orientada positivamente cuando se la mira desde un punto situado muy arriba en el eje OZ. Calcular

$$\int_C (-y+\cos e^x)\ dx + y\,dy + z\,dz$$

aplicando el teorema de Stokes sobre una superficie plana adecuada.

Solución. Los puntos del plano $y=-\sqrt{2}z$ verifican $y^2=2z^2$, lo que implica que la curva C es

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y+\sqrt{2}z=0. \end{cases}$$

Entonces, consideramos la superficie plana

$$S=\left\{(x,y,z) : x^2+y^2\leq 1,\ \ y+\sqrt{2}z=0\right\}$$

cuya frontera es la curva C. Parametrizamos S usando coordenadas cartesianas, es decir,

$$S(x,y)=\left(x,y,-\frac{y}{\sqrt{2}}\right),\ \ (x,y)\in D,$$

donde $D=\{(x,y) : x^2+y^2\leq 1\}$. El producto vectorial fundamental es

$$S_x\times S_y=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},1\right).$$

Es un vector constante que tiene la dirección del vector normal al plano y la orientación que induce coincide con la que tiene la curva C. A continuación, calculamos el rotacional del campo $F(x,y,z)=(-y+\cos e^x,y,z)$,

$$\operatorname{rot} F=\nabla\times F=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ -y+\cos e^x & y & z \end{vmatrix}=(0,0,1).$$

El teorema de Stokes asegura que

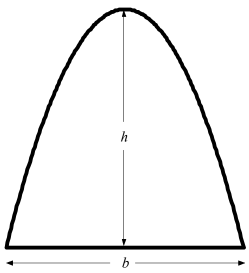
$$\oint_C F\cdot dr=\iint_S \operatorname{rot} F\cdot n\,dS=\iint_D (0,0,1)\cdot\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)\,dx\,dy=\iint_D\,dx\,dy=\pi.$$

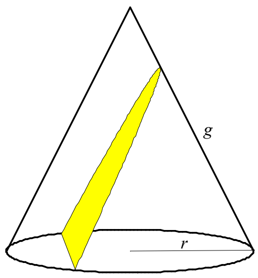
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 27 de Enero de 2003

Ejercicio 1. Deducir la fórmula del área de un segmento parabólico en función de su base y su altura. Se considera un cono circular recto con radio de la base r y generatrices de longitud g. Al cortarlo por un plano paralelo a una de dichas generatrices se obtiene como intersección un segmento parabólico. Calcular el área máxima de los segmentos parabólicos obtenidos por este procedimiento.





Solución: Elegimos un sistema de coordenadas tal que la base del segmento está contenida en el eje x y el vértice de la parábola es un punto del eje y. Entonces, denotando $y = ax^2+Bx+c$, tenemos que la solución de $y' = 2ax + B = 0$ es $x = -B/2a = 0$, lo que implica que $B = 0$. Además, la coordenada y del vértice es $y(0) = c = h$. Finalmente, los puntos intersección de la parábola con el eje x verifican

$$y = ax^2 + h = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{h}{a}} = \pm\frac{b}{2} \Rightarrow -\frac{h}{a} = \frac{b^2}{4} \Rightarrow a = -\frac{4h}{b^2}.$$

En consecuencia, la ecuación de la parábola es

$$y = -\frac{4h}{b^2}x^2 + h = h\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right).$$

El área del segmento parabólico, en función de su base y su altura, es

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{b/2} h\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right) dx = 2h\left(x - \frac{4x^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^{b/2} \\ &= 2h\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{6}\right) = 2h\frac{2b}{6} = \frac{2}{3}bh. \end{aligned}$$

Si elegimos un sistema de coordenadas xyz tal que la base del cono está contenida en el plano xy y el origen coincide con el centro de dicha base, los puntos intersección de las parábolas con dicho plano son $\left(x, \sqrt{r^2 - x^2}\right)$ y $\left(x, -\sqrt{r^2 - x^2}\right)$, donde $x \in [-r, r]$. Por lo tanto, las bases de los sementos parabólicos son $b(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, donde $x \in [-r, r]$.

Si denotamos por α el ángulo formado por una recta generatriz y su proyección sobre el plano xy, tenemos que $\cos\alpha = r/g$. La altura $h(x)$ y la generatriz opuesta forman un triángulo isósceles con dos ángulos iguales a α cuya base es $r - x$. Entonces

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{r-x}{2}}{h(x)} = \frac{r}{g} \Longrightarrow h(x) = \frac{g(r-x)}{2r}, \quad -r \leq x \leq r.$$

El área de los segmentos parabólicos es

$$A(x) = \frac{2}{3} b(x) h(x) = \frac{4}{3}\sqrt{r^2 - x^2}\frac{g(r-x)}{2r} = \frac{2g}{3r}(r-x)\sqrt{r^2 - x^2},$$

donde $-r \leq x \leq r$. Para calcular el área máxima, resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{2g}{3r}\left(-\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x(r-x)}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right) \\ &= \frac{2g}{3r}\left(\frac{-\left(r^2 - x^2\right) - rx + x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) \\ &= \frac{2g}{3r}\left(\frac{2x^2 - rx - r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) = 0, \end{aligned}$$

lo que implica $2x^2 - rx - r^2 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son los puntos críticos

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{4} = \frac{r \pm 3r}{4} = \begin{cases} r \\ -r/2. \end{cases}$$

Dado que en los extremos $A(r) = A(-r) = 0$ y en el único punto crítico que es interior, tenemos

$$A(-r/2) = \frac{2g}{3r}\frac{3r}{2}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = g\sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}gr,$$

este valor es el área máxima de los segmentos parabólicos.

Ejercicio 2. La curva $y = x^k$, $0 \leq x \leq 1$, donde $k > 0$, divide el cuadrado formado por los ejes coordenados y las rectas $x = 1$, $y = 1$, en dos regiones R_1 (la superior) y R_2 (la inferior). Obtener por el método de los discos, el volumen V_1 del sólido generado al girar la región R_1 en torno al eje y. Obtener por el método de las capas (o de los tubos), el volumen V_2 del sólido generado al girar la región R_2 en torno al eje y. En el caso $k = 2$, obtener el área de la superficie generada al girar la curva dada en torno al eje y y la longitud de dicha curva.

Solución: Las regiones definidas por la curva $y = x^k$ en el cuadrado unidad son

$$\begin{aligned} R_1 &= \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \;\; x^k \leq y \leq 1\right\}, \\ R_2 &= \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \;\; 0 \leq y \leq x^k\right\}. \end{aligned}$$

El volumen del sólido generado al girar R_1 alrededor del eje y, usando el método de los discos, es

$$V_1 = \pi \int_0^1 x\,(y)^2 \, dy = \pi \int_0^1 \left(y^{\frac{1}{k}}\right)^2 dy = \pi \int_0^1 y^{\frac{2}{k}} \, dy = \pi \left. \frac{y^{\frac{2}{k}+1}}{\frac{2}{k}+1} \right|_0^1 = \frac{k\pi}{k+2}.$$

El volumen del sólido generado al girar R_2 alrededor del eje y, usando el método de las capas, es

$$V_2 = 2\pi \int_0^1 xy \, dx = 2\pi \int_0^1 x^{k+1} \, dx = 2\pi \left. \frac{x^{k+2}}{k+2} \right|_0^1 = \frac{2\pi}{k+2}.$$

El área de la superficie generada al girar $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, alrededor del eje y es

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + (y')^2} \, dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2} \, dx \\ &= 2\pi \frac{2}{3} \frac{1}{8} \left(1 + 4x^2\right)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} \left(5^{3/2} - 1\right). \end{aligned}$$

La longitud de la curva $y = x^2$ definida en $[0, 1]$ es

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} \, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = 2 \int_0^1 \sqrt{(1/2)^2 + x^2} \, dx.$$

En primer lugar, vamos a calcular una primitiva de la función $\sqrt{a^2 + x^2}$. Usando la sustitución $x = a \operatorname{sh} t$, obtenemos $dx = a \operatorname{ch} t \, dt$ y además

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 t} = a\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = a \operatorname{ch} t.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx &= \int a^2 \operatorname{ch}^2 t\,dt = a^2 \int \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 dt = \frac{a^2}{4}\int \left(e^{2t}+e^{-2t}+2\right) dt \\
&= \frac{a^2}{4}\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}+2t\right)+C = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\left(e^t-e^{-t}\right)\left(e^t+e^{-t}\right)}{2}+2t\right)+C \\
&= \frac{a^2}{4}\left(2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t+2t\right)+C = \frac{a^2}{4}\left(\frac{2x}{a}\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}+2\operatorname{arg\,sh}\frac{x}{a}\right)+C \\
&= \frac{a^2}{4}\left(\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2+x^2}+2\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right|\right)+C \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right|+C \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C^*.
\end{aligned}$$

A continuación, calculamos la integral definida

$$\begin{aligned}
L &= 2\int_0^1 \sqrt{(1/2)^2+x^2}\,dx \\
&= \sqrt{\frac{5}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left(1+\sqrt{\frac{5}{4}}\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sqrt{5}/2}{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right).
\end{aligned}$$

Ejercicio 3. Se considera la función $f(x) = \ln(1+x)$ definida en el intervalo $(-1, \infty)$. Obtener la serie de Taylor en cero de f, su radio y su dominio de convergencia. Estudiar el carácter de la integral

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p \operatorname{sen} x}\, dx.$$

Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n},$$

y obtener su suma en caso de que sea convergente.

Solución: La derivada de la función $f(t) = \ln(1+t)$ satisface

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n,$$

donde $|t| < 1$. Integrando la derivada entre 0 y x, obtenemos

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

por lo que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

es la serie de Taylor de f, debido a su unicidad. El radio de convergencia de la serie es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

La serie converge absolutamente en $(-1, 1)$. Estudiamos la convergencia en los puntos terminales $x = -1$ y $x = 1$. En el primero, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente por el criterio integral. En el segundo punto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

es convergente por el criterio de Leibnitz. Entonces la serie es convergente en el intervalo $(-1, 1]$.

Para analizar la integral impropia, usamos el criterio de comparación por límites con la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

que es convergente si $\alpha < 1$ y divergente si $\alpha \geq 1$. Calculamos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^p \operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha}{x^p} = 1$$

si $p = \alpha$ porque $\ln(1+x)$ y $\operatorname{sen} x$ son infinitésimos equivalentes cuando $x \to 0^+$. En consecuencia, la integral es convergente si $p < 1$ y divergente si $p \geq 1$.

Aplicando el criterio del cociente a la serie, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}}{\dfrac{1}{n2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

por lo que la serie es convergente. Para sumarla, usando el apartado 1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n2^n} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\
&= -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2.
\end{aligned}$$

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Segundo Examen Parcial. 11 de Junio de 2003

Ejercicio 1. Calcular el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Probar que el elipsoide de volumen máximo, sujeto a la condición de que $a + b + c$ sea constante, es una esfera.

Solución. Usando las coordenadas $x = ar \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = br \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$, $z = cr \cos \phi$, la ecuación del elipsoide es $r = 1$ y el sólido que encierra esta superficie es

$$E = \{(r, \phi, \theta) : 0 \leq r \leq 1, \ \ 0 \leq \phi \leq \pi, \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

El jacobiano de este cambio de coordenadas es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \phi, \theta)} &= \begin{vmatrix} a \operatorname{sen} \phi \cos \theta & ar \cos \phi \cos \theta & -ar \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ b \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & br \cos \phi \operatorname{sen} \theta & br \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ c \cos \phi & -cr \operatorname{sen} \phi & 0 \end{vmatrix} \\
&= c \cos \phi \begin{vmatrix} ar \cos \phi \cos \theta & -ar \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ br \cos \phi \operatorname{sen} \theta & br \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{vmatrix} + cr \operatorname{sen} \phi \begin{vmatrix} a \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -ar \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ b \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & br \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{vmatrix} \\
&= abcr^2 \cos^2 \phi \operatorname{sen} \phi + abcr^2 \operatorname{sen}^3 \phi = abcr^2 \operatorname{sen} \phi.
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula del cambio de variables, obtenemos

$$\operatorname{vol}(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 abcr^2 \operatorname{sen} \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = abc 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 [-\cos \phi]_0^{\pi} = \frac{4}{3} \pi abc.$$

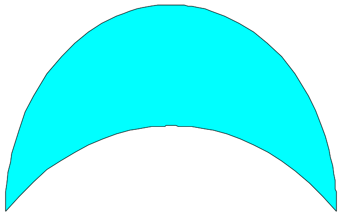
La función objetivo $f(a, b, c) = \frac{4}{3} \pi abc$ es no negativa y sólo se anula si al menos uno de los semiejes a, b, c es nulo; en cuyo caso se obtendría el valor mínimo. Entonces, podemos suponer que $a, b, c > 0$. La restricción es $g(a, b, c) = a + b + c - k = 0$. Usando el criterio de los multiplicadores de Lagrange, determinamos los puntos solución del sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$, resolviendo

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \pi bc = \lambda, \\ \frac{4}{3} \pi ac = \lambda, \\ \frac{4}{3} \pi ab = \lambda, \\ a + b + c = k. \end{cases}$$

Igualando las tres primera ecuaciones, obtenemos $bc = ac = ab$, que con la cuarta implican $a = b = c = \dfrac{k}{3}$. Entonces hemos obtenido una esfera de radio $\dfrac{k}{3}$, con $\operatorname{vol} = \dfrac{4}{3} \pi \left(\dfrac{k}{3}\right)^3 = \dfrac{4\pi k^3}{81}$.

Ejercicio 2. (*Cuadratura de la luna*) Consideremos la región R del plano que es exterior a la circunferencia con centro en $(0,0)$ que pasa por el punto (a,a) e interior a la circunferencia con centro en $(0,a)$ y radio a. Usando el teorema de Green, demostrar que el área de dicha región coincide con el área de un cuadrado de lado a.

Solución.



La ecuación de la circunferencia con centro en $(0,a)$ y radio a es $x^2 + (y-a)^2 = a^2$. La ecuación de la circunferencia con centro en $(0,0)$ que pasa por (a,a) es $x^2 + y^2 = 2a^2$. Los puntos de intersección de ambas son $(-a,a)$ y (a,a) que tienen coordenadas polares $\left(a\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$ y $\left(a\sqrt{2}, \pi/4\right)$ respectivamente.

La curva cerrada C que forma la frontera de R es unión de la curva C_1 parametrizada por $x(\theta) = a\cos\theta$, $y(\theta) = a + a\,\text{sen}\,\theta$, donde $\theta \in [0,\pi]$ y de la curva C_2 parametrizada por $x(\theta) = a\sqrt{2}\cos\theta$, $y(\theta) = a\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta$, donde $\theta \in [\pi/4, 3\pi/4]$.

El teorema de Green implica que

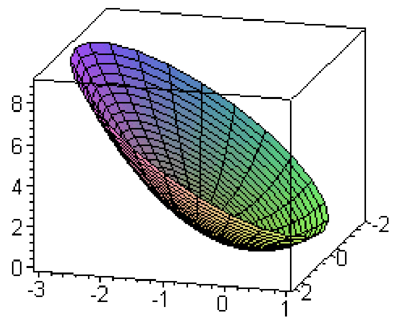
$$\acute{a}rea\,(R) = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx,$$

donde la orientación de C es positiva. Las orientaciones de C_1 y C_2 con las parametrizaciones dadas son antihorarias, por lo que para que C tenga orientación positiva, debemos usar la orientación horaria en C_2, cambiando el signo de la integral de línea. Entonces,

$$\begin{aligned}
\acute{a}rea\,(D) &= \frac{1}{2}\left(\int_{C_1} x\,dy - y\,dx - \int_{C_2} x\,dy - y\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\left(a^2\,\text{sen}\,\theta + a^2\right)d\theta - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2a^2\,d\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(a^2\left[-\cos\theta + \theta\right]_0^{\pi} - 2a^2\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2a^2 + \pi a^2 - \pi a^2\right) = a^2.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3. Sea S la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra en el semiespacio $2y+z \leq 3$. Calcular el flujo de salida del campo $F(x,y,z) = (y+z, x+z, z)$ directamente y mediante el teorema de Gauss.
Indicación: Utilizar las coordenadas $x = r\cos\theta$, $y = -1+r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$, para parametrizar S.

Solución.



La ecuación del paraboloide con las coordenadas dadas es

$$z = r^2\cos^2\theta + (r\operatorname{sen}\theta - 1)^2 = r^2 - 2r\operatorname{sen}\theta + 1,$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $z \leq 3 - 2y$ implica $r^2 - 2r\operatorname{sen}\theta + 1 \leq 5 - 2r\operatorname{sen}\theta$, lo que equivale a que $r^2 \leq 4$. En consecuencia, la parametrización de S es

$$S(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta - 1, r^2 - 2r\operatorname{sen}\theta + 1\right), \quad 0 \leq r \leq 2, \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental es

$$S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 2r - 2\operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & -2r\cos\theta \end{vmatrix} = \left(-2r^2\cos\theta, 2r - 2r^2\operatorname{sen}\theta, r\right).$$

En el punto $S(1,0) = (1,-1,2)$ el producto vectorial fundamental

$$(S_r \times S_\theta)(1,0) = (-2,2,1)$$

tiene la dirección interior. El flujo de salida del campo $F(x,y,z) = (y+z, x+z, z)$ a través de S es

$$\iint_S F \cdot n\, dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} -F[S(r,\theta)] \cdot (S_r \times S_\theta)\, d\theta\, dr.$$

El producto escalar $-F[S(r,\theta)] \cdot (S_r \times S_\theta) =$

$$\left(r^2 - r\operatorname{sen}\theta, r^2 - 2r\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta + 1, r^2 - 2r\operatorname{sen}\theta + 1\right) \cdot \left(2r^2\cos\theta, -2r + 2r^2\operatorname{sen}\theta, -r\right)$$
$$= 2r^4(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) - 4r^3\operatorname{sen}^2\theta + 8r^2\operatorname{sen}\theta - 2r^2\cos\theta - 3r^3 - 3r.$$

El flujo exterior a través de S, usando que $\operatorname{sen}^2\theta = (1-\cos 2\theta)/2$, es

$$\int_0^2\int_0^{2\pi}\left[2r^4(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)-4r^3\operatorname{sen}^2\theta+8r^2\operatorname{sen}\theta-2r^2\cos\theta-3r^3-3r\right]d\theta\,dr$$
$$=\int_0^2\left[2r^4(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)-4r^3\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right)-8r^2\cos\theta-2r^2\operatorname{sen}\theta-3\left(r^3+r\right)\theta\right]_0^{2\pi}dr$$
$$=\int_0^2\left[-4\pi r^3-6\pi\left(r^3+r\right)\right]dr=\int_0^2\left[-10\pi r^3-6\pi r\right]dr=-\pi\left[\frac{10r^4}{4}+3r^2\right]_0^2$$
$$=-\pi(40+12)=-52\pi.$$

Para usar el teorema de Gauss, consideramos la superficie T tal que $S\cup T$ es una superficie cerrada. Como T está contenida en el plano $z=3-2y$, su parametrización es

$$T(r,\theta)=(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta-1,5-2r\operatorname{sen}\theta),\quad 0\le r\le 2,\ \ 0\le\theta\le 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental es

$$T_r\times T_\theta=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \cos\theta&\operatorname{sen}\theta&-2\operatorname{sen}\theta\\ -r\operatorname{sen}\theta&r\cos\theta&-2r\cos\theta\end{vmatrix}=(0,2r,r).$$

Dado que $T_r\times T_\theta$ tiene la dirección exterior al sólido Ω encerrado por $S\cup T$, el flujo exterior a través de T es

$$\iint_T F\cdot n\,dS=\int_0^2\int_0^{2\pi}(4-r\operatorname{sen}\theta,r\cos\theta+5-2r\operatorname{sen}\theta,5-2r\operatorname{sen}\theta)\cdot(0,2r,r)\,d\theta\,dr$$
$$=\int_0^2\int_0^{2\pi}r\left(2r\cos\theta-6r^2\operatorname{sen}\theta+15\right)d\theta\,dr$$
$$=\int_0^2 r\left[2r\operatorname{sen}\theta+6r^2\cos\theta+15\theta\right]_0^{2\pi}dr=\int_0^2 30\pi r\,dr$$
$$=30\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2=60\pi.$$

El teorema de la divergencia de Gauss afirma que *el flujo de salida de F a través de $S\cup T$ coincide con la integral triple de la divergencia de F*, es decir

$$\iint_{S\cup T}F\cdot n\,dS=\iiint_\Omega\operatorname{div}(F)\,dx\,dy\,dz.$$

Dado que $\operatorname{div}(F)=F_x+F_y+F_z=1$, y el sólido

$$\Omega=\left\{(r,\theta,z):0\le r\le 2,\ \ 0\le\theta\le 2\pi,\ \ r^2-2r\operatorname{sen}\theta+1\le z\le 5-2r\operatorname{sen}\theta\right\},$$

tenemos que

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}(F)\; dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2-2r\operatorname{sen}\theta+1}^{5-2r\operatorname{sen}\theta} r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(4 - r^2\right) r\, dr\, d\theta = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi.$$

Entonces, el flujo de salida del campo F a través de S es

$$\iint\limits_{S} F \cdot n\, dS = \iint\limits_{S\cup T} F \cdot n\, dS - \iint\limits_{T} F \cdot n\, dS = 8\pi - 60\pi = -52\pi.$$

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen de 1 de Septiembre de 2003
PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Una vasija que tiene la forma del paraboloide de revolución de eje vertical obtenido al girar la curva $y = px^2$ en torno al eje OY, se encuentra parcialmente llena de agua. Calcular el cociente entre el área de la superficie mojada de la vasija y el volumen de líquido cuando la superficie superior del agua es un círculo de radio R.

Solución. Usando el *método de los discos,* el volumen V del líquido es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{pR^2} x^2\, dy = \pi \int_0^{pR^2} \frac{y}{p}\, dy \\ &= \frac{\pi}{p}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{pR^2} = \frac{\pi}{p}\frac{p^2R^4}{2} \\ &= \frac{\pi p R^4}{2}. \end{aligned}$$

El área de la superficie mojada viene dada por

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^R x\sqrt{1+(y')^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_0^R x\sqrt{1+4p^2x^2}\, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{2}{3}\frac{1}{8p^2}\left(1+4p^2x^2\right)^{3/2}\right]_0^R \\ &= \frac{\pi}{6p^2}\left[\left(1+4p^2R^2\right)^{3/2}-1\right]. \end{aligned}$$

El cociente entre el área de la superficie y el volumen es

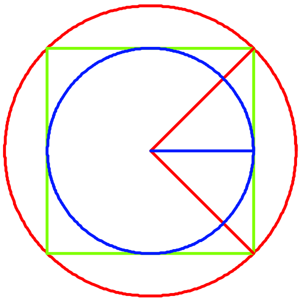
$$\begin{aligned} \frac{A}{V} &= \frac{\frac{\pi}{6p^2}\left[\left(1+4p^2R^2\right)^{3/2}-1\right]}{\frac{\pi p R^4}{2}} \\ &= \frac{\left(1+4p^2R^2\right)^{3/2}-1}{3p^3R^4}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.

1. Dentro de un círculo de radio R se inscribe un cuadrado y dentro de éste un nuevo círculo. El proceso se repite indefinidamente. Determinar la suma de las áreas de todos los círculos resultantes.

2. A partir de la serie geométrica, obtener el desarrollo en serie de potencias en el origen de la función $f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Solución. 1. Si R es el radio del círculo dado, tenemos que su área es $A_0 = \pi R^2$.



El radio y el área del nuevo círculo inscrito en el cuadrado son

$$R \cos \frac{\pi}{4} = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad A_1 = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Usando el principio de inducción, obtenemos que el radio y el área del n-ésimo círculo son

$$R \cos^n \frac{\pi}{4} = \frac{R}{2^{\frac{n}{2}}} \quad \text{y} \quad A_n = \frac{\pi R^2}{2^n}.$$

En consecuencia, la suma de las áreas de todos los círculos resultantes es

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \pi R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \pi R^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2\pi R^2.$$

2. Derivando la serie geométrica

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad -1 < x < 1,$$

obtenemos

$$\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2nx^{2n-1}, \quad -1 < x < 1.$$

El desarrollo en serie de potencias en el origen de la función es

$$f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2nx^{2n-1}, \quad -1 < x < 1.$$

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen de 1 de Septiembre de 2003
SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Se desea construir un abrevadero para ganado con una chapa rectangular muy larga y con a metros de anchura. A ese efecto se pretende doblar hacia arriba dos tiras laterales de anchura x con un ángulo θ y tapar luego los extremos con dos piezas planas trapezoidales adecuadas iguales. Determinar x y θ de forma que el abrevadero resultante tenga volumen máximo y obtener el área de las piezas planas necesarias para tapar los extremos.

Solución. El volumen del abrevadero es el producto del área de la pieza plana trapezoidal por la longitud l de la chapa, es decir,

$$V = \frac{1}{2}(B+b)\,hl,$$

donde

$$b = a-2x, \quad B = a-2x+2x\cos\theta \quad \text{y} \quad h = x\operatorname{sen}\theta.$$

Entonces

$$V(x,\theta) = (a-2x+x\cos\theta)\,x\operatorname{sen}\theta l = l\left[(a-2x)\,x\operatorname{sen}\theta + x^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right],$$

donde $0 \le x \le a/2$ y $0 \le \theta \le \pi/2$. En primer lugar, determinamos los puntos del interior del conjunto que verifican $\nabla V(x,\theta) = (0,0)$, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} l\left[-2x\operatorname{sen}\theta + (a-2x)\operatorname{sen}\theta + 2x\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right] = 0, \\ l\left[(a-2x)\,x\cos\theta + x^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)\right] = 0. \end{cases}$$

La primera ecuación implica que

$$a\operatorname{sen}\theta + 2x(\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{sen}\theta\left[a + 2x(\cos\theta - 2)\right] = 0.$$

En el interior del conjunto tenemos que $0 < \theta < \pi/2$, luego $\operatorname{sen}\theta > 0$. Esto implica que

$$a + 2x(\cos\theta - 2) = 0$$

y obtenemos

$$x = \frac{a}{2(2-\cos\theta)}.$$

Con este valor, la segunda ecuación es

$$\iff \left(a-\frac{a}{2-\cos\theta}\right)\frac{a\cos\theta}{2\left(2-\cos\theta\right)}+\frac{a^2\left(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta\right)}{4\left(2-\cos\theta\right)^2}=0$$
$$\iff \left(\frac{a\left(2-\cos\theta\right)-a}{2-\cos\theta}\right)\frac{a\cos\theta}{2\left(2-\cos\theta\right)}+\frac{a^2\left(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta\right)}{4\left(2-\cos\theta\right)^2}=0$$
$$\iff \frac{2\left(a-a\cos\theta\right)a\cos\theta+a^2\cos^2\theta-a^2\operatorname{sen}^2\theta}{4\left(2-\cos\theta\right)^2}=0$$
$$\iff \frac{2a^2\cos\theta-a^2\cos^2\theta-a^2\operatorname{sen}^2\theta}{4\left(2-\cos\theta\right)^2}=0\iff\frac{2a^2\cos\theta-a^2}{4\left(2-\cos\theta\right)^2}=0$$
$$\iff a^2\left(2\cos\theta-1\right)=0\iff\cos\theta=\frac{1}{2}\iff\theta=\frac{\pi}{3}.$$

En consecuencia, la anchura de cada tira y el ángulo obtenidos son

$$x=\frac{a}{2\left(2-\frac{1}{2}\right)}=\frac{a}{3},\quad \theta=\frac{\pi}{3}.$$

En el punto interior obtenido, el área de cada pieza trapezoidal plana es

$$A=\left(a-2x\right)x\operatorname{sen}\theta+x^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta=\left(\frac{a}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{a}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{a}{3}\right)^2\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2.$$

El volumen obtenido en el punto es

$$V\left(\frac{a}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2l.$$

A continuación, estudiamos los puntos críticos en los cuatro segmentos que forman la frontera. Si $x=0$ entonces $V=0$. Si $x=a/2$ el volumen viene dado por $V\left(\theta\right)=\left(a^2/4\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta l$, donde $0\le\theta\le\pi/2$. Resolviendo la ecuación

$$V'\left(\theta\right)=\left(a^2/4\right)\left(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta\right)l=0,$$

obtenemos $\cos 2\theta=0$, donde $0\le 2\theta\le\pi$, luego $2\theta=\pi/2$ y el único punto crítico es $\theta=\pi/4$. Por tanto,

$$V\left(\frac{a}{2},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a^2}{4}\frac{1}{2}l=\frac{1}{8}a^2l.$$

Si $\theta=0$ entonces $V=0$. Si $\theta=\pi/2$ el volumen es $V\left(x\right)=\left(a-2x\right)xl$, donde $0\le x\le a/2$. La ecuación

$$V'\left(x\right)=\left(-2x+a-2x\right)l=\left(a-4x\right)l=0,$$

tiene como única solución $x=a/4$. El volumen en dicho punto es

$$V\left(\frac{a}{4},\frac{\pi}{2}\right)=\left(a-\frac{a}{2}\right)\frac{a}{4}l=\frac{1}{8}a^2l.$$

Dado que $\frac{1}{8}<\frac{\sqrt{3}}{12}\Leftrightarrow\frac{3}{2}<\sqrt{3}$, el volumen máximo se alcanza en $(a/3,\pi/3)$ y el área de cada pieza es $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$.

Ejercicio 4. Sea Ω el recinto comprendido entre el exterior de un paraboloide y el interior de un elipsoide definido por

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + 3 \leq x^2 + 4y^2, \;\; x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9\right\}.$$

Sea S la superficie que limita a Ω y sea $F(x, y, z) = (xz, \operatorname{sen} z, e^y)$. Calcular $\iint_S F \cdot n \, dS$ usando el teorema de Gauss.

Solución. El teorema de Gauss afirma que *el flujo de salida de F a través de S coincide con la integral triple de la divergencia de F*, es decir

$$\iint\limits_S F \cdot n \, dS = \iiint\limits_\Omega \operatorname{div}(F) \; dx \, dy \, dz.$$

La divergencia de $F(x, y, z) = (xz, \operatorname{sen} z, e^y)$ es $\operatorname{div}(F) = z$, por lo que debemos calcular $\iiint_\Omega z \, dx \, dy \, dz$. Obtenemos la intersección del paraboloide y el elipsoide, resolviendo

$$\left.\begin{array}{r} z + 3 = x^2 + 4y^2 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 9 \end{array}\right\} \Longrightarrow z + 3 + z^2 = 9 \Longrightarrow z^2 + z - 6 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \;\; 2, \\ -3. \end{cases}$$

Entonces, la región Ω se puede describir como la unión de las secciones

$$A(z) = \left\{(x, y) : z + 3 \leq x^2 + 4y^2 \leq 9 - z^2\right\}, \quad -3 \leq z \leq 2.$$

Por ello, la integral triple verifica

$$\iiint_\Omega z \, dx \, dy \, dz = \int_{-3}^{2} \left(\iint\limits_{A(z)} dx \, dy \right) z \, dz = \int_{-3}^{2} \text{área}\,(A(z))\, z \, dz.$$

Cada sección $A(z)$ es el recinto comprendido entre las elipses $x^2 + 4y^2 = 9 - z^2$ y $x^2 + 4y^2 = z + 3$. Las ecuaciones canónicas de estas elipses son

$$\frac{x^2}{9 - z^2} + \frac{y^2}{(9 - z^2)/4} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{z + 3} + \frac{y^2}{(z + 3)/4} = 1.$$

Las áreas de las regiones que encierran las elipses son, respectivamente,

$$A_1 = \pi \sqrt{9 - z^2} \sqrt{\frac{9 - z^2}{4}} = \frac{\pi}{2}\left(9 - z^2\right),$$

$$A_2 = \pi \sqrt{z + 3} \sqrt{\frac{z + 3}{4}} = \frac{\pi}{2}(z + 3).$$

Entonces, el área $(A(z)) = A_1 - A_2 = \frac{\pi}{2}(6 - z^2 - z)$ y la integral pedida es

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega z\, dx\, dy\, dz &= \frac{\pi}{2}\int_{-3}^{2}\left(-z^3 - z^2 + 6z\right)\, dz = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} + 3z^2\right]_{-3}^{2} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} + 12 + \frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 27\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(-4 - \frac{8}{3} + 12 + \frac{81}{4} - 9 - 27\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{81}{4} - \frac{8}{3} - 28\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{-125}{12}\right) \\
&= -\frac{125\pi}{24}.
\end{aligned}$$

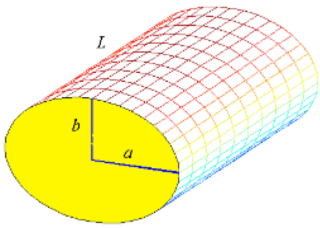
CÁLCULO

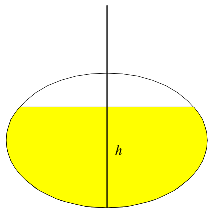
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 19 de Junio de 2004

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Un depósito subterráneo de gasolina tiene forma de cilindro elíptico, con semieje horizontal a, semieje vertical b y anchura L. Para medir su contenido se sumerge una vara hasta la parte inferior del depósito y se mide la altura h del nivel de gasolina. Calcular el volumen de la gasolina que contiene el depósito en función de h.





Solución. Consideramos la elipse de semiejes a y b que es una sección del depósito. En primer lugar, calculamos el área de la porción de la elipse que está comprendida entre el vértice $(0, -b)$ y la recta $y = -b + h$. Dado que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

tenemos que las coordenadas de dos puntos simétricos respecto al eje y son

$$\left(a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, y\right), \quad \left(-a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, y\right),$$

donde $-b \leq y \leq b$. Entonces, el área de la porción de elipse es

$$A(h) = 2a \int_{-b}^{-b+h} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\, dy = \frac{2a}{b} \int_{-b}^{-b+h} \sqrt{b^2 - y^2}\, dy.$$

Para calcular la integral, usaremos el cambio de variable $y = b \operatorname{sen} t$, que verifica

$$\begin{aligned} y &= -b \Rightarrow \operatorname{sen} t = -1 \Rightarrow t = -\pi/2, \\ y &= -b + h \Rightarrow \operatorname{sen} t = \frac{h}{b} - 1 \Rightarrow t = \operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b} - 1\right), \\ dy &= b \cos t\, dt, \ \sqrt{b^2 - y^2} = b\sqrt{\cos^2 t} = b\left|\cos t\right| = b \cos t. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
A(h) &= ab\int_{-\pi/2}^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)} 2\cos^2 t\,dt = ab\int_{-\pi/2}^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)} (1+\cos 2t)\ dt \\
&= ab\left[t+\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)} \\
&= ab\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)+\frac{\pi}{2}+\left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)}\right).
\end{aligned}$$

Dado que $\operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t\,\cos t$, el valor de $\cos t$ en $t = \operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)$ viene dado por $\cos t = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{h}{b}-1\right)^2}$, y además $\operatorname{sen}(-\pi) = 0$, obtenemos

$$\left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)} = \left(\frac{h}{b}-1\right)\sqrt{1-\left(\frac{h}{b}-1\right)^2}.$$

El volumen de la gasolina que contiene el depósito es

$$V(h) = abL\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)+\frac{\pi}{2}+\left(\frac{h}{b}-1\right)\sqrt{1-\left(\frac{h}{b}-1\right)^2}\right).$$

Ejercicio 2. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n,$$

calcular su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su suma en dicho dominio.

Solución. El radio de convergencia de la serie de potencias es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+3n^2+3n+1} = 1.$$

En el extremo $x = 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$ es divergente porque la sucesión $\left(n^3\right)_{n\geq 1}$ no converge a cero. Por la misma razón, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (-1)^n$ también es divergente. Entonces, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. Para calcular la suma de la serie en los puntos tales que $|x| < 1$, sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

para $|x| < 1$. Derivando, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

lo que implica $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \Big/ (1-x)^2$. Derivando ambos términos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

para $|x| < 1$. Multiplicando por x, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}.$$

Derivando una vez más,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+x}{(1-x)^3}\right) = \frac{(2x+1)(1-x)^3 + 3\left(x^2+x\right)(1-x)^2}{(1-x)^6} \\
&= \frac{(2x+1)(1-x) + 3\left(x^2+x\right)}{(1-x)^4} = \frac{2x+1-2x^2-x+3x^2+3x}{(1-x)^4} \\
&= \frac{x^2+4x+1}{(x-1)^4}.
\end{aligned}$$

Entonces, la suma de la serie en el dominio $|x| < 1$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x\left(x^2+4x+1\right)}{(x-1)^4}.$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 19 de Junio de 2004

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4x - 3y$, sobre el conjunto $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ \ 4x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

Solución. En primer lugar, buscamos puntos en el interior de M, tales que

$$\nabla f(x,y) = (8x-4, 2y-3) = (0,0) \Longrightarrow (x,y) = (1/2, 3/2).$$

Las coordenadas del punto $P_1 = (1/2, 3/2)$ verifican $4(1/4) + 9/4 = 13/4 < 4$ y $3/2 > 0$, por lo que P_1 pertenece al interior de M. La frontera de M es la unión de la semielipse $4x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ y el segmento $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$. Usando multiplicadores de Lagrange $\nabla f = \lambda \nabla g$, con la restricción $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$, obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} 8x - 4 = \lambda 8x, \\ 2y - 3 = \lambda 2y, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x(1-\lambda) = 1, \\ 2y(1-\lambda) = 3. \end{array}\right.$$

Entonces, $6x(1-\lambda) = 3 = 2y(1-\lambda)$. Si $\lambda = 1$ obtenemos $8x - 4 = 8x$, por lo que necesariamente $\lambda \neq 1$ y podemos dividir por $(1-\lambda)$. Así, tenemos que $6x = 2y \Leftrightarrow 3x = y$, por lo que $4x^2 + 9x^2 - 4 = 0$, que implica $13x^2 = 4$. Las soluciones son $x = \pm 2 \big/ \sqrt{13}$ y sabemos que $y = 3x$, luego el único punto que verifica la restricción con $y \geq 0$ es

$$P_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right).$$

En el segmento $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$, tenemos que $\nabla f = \lambda \nabla h$, con $h(x,y) = y$, implica

$$\left\{\begin{array}{l} 8x - 4 = 0, \\ 2y - 3 = \lambda, \\ y = 0, \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/2, \\ \lambda = -3, \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Por tanto, el tercer punto es $P_3 = (1/2, 0)$. La intersección de la semielipse con el segmento proporciona los puntos $P_4 = (-1,0)$ y $P_5 = (1,0)$. Los valores de la función en dichos puntos son

$$f(P_1) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{13}{4} - \frac{4}{2} - \frac{9}{2} = \frac{13}{4} - \frac{13}{2} = -\frac{13}{4} = -3.25,$$

$$f(P_2) = f\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right) = 4 - \frac{8}{\sqrt{13}} - \frac{18}{\sqrt{13}} = 4 - \frac{26}{\sqrt{13}} \approx -3.2111,$$

$$f(P_3) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -1, \quad f(P_4) = f(-1,0) = 8, \quad f(P_5) = f(1,0) = 0.$$

En consecuencia, el máximo absoluto se alcanza en P_4, mientras que el mínimo absoluto se alcanza en P_1.

Ejercicio 4. Sea S el octante positivo de la superficie esférica unidad.

1. Calcular la integral de superficie
$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}\, dS.$$

2. Calcular directamente y usando el teorema de Stokes la integral de línea $\oint_C F \cdot dr$, donde C es la curva frontera de S orientada por la normal exterior y
$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z).$$

Solución 1. Parametrizamos S usando coordenadas esféricas, es decir,

$$S(\Phi,\theta) = (\operatorname{sen}\Phi\cos\theta, \operatorname{sen}\Phi\operatorname{sen}\theta, \cos\Phi), \quad (\Phi,\theta) \in [0,\pi/2] \times [0,\pi/2].$$

El producto vectorial fundamental es

$$\begin{aligned} S_\Phi \times S_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\Phi\cos\theta & \cos\Phi\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\Phi \\ -\operatorname{sen}\Phi\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\Phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\operatorname{sen}^2\Phi\cos\theta, \operatorname{sen}^2\Phi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\Phi\cos\Phi\right). \end{aligned}$$

En primer lugar, obtenemos la norma del producto

$$\|S_\Phi \times S_\theta\| = \left(\operatorname{sen}^4\Phi + \operatorname{sen}^2\Phi\cos^2\Phi\right)^{1/2} = \left(\operatorname{sen}^2\Phi\right)^{1/2} = |\operatorname{sen}\Phi| = \operatorname{sen}\Phi,$$

porque $\Phi \in [0,\pi/2]$. A continuación, calculamos el valor del integrando en S,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\Phi\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\Phi\operatorname{sen}^2\theta + (\cos\Phi - 1)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\Phi + \cos^2\Phi + 1 - 2\cos\Phi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2-2\cos\Phi}}. \end{aligned}$$

Finalmente, calculamos la integral de superficie

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}\, dS &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\Phi}{\sqrt{2-2\cos\Phi}}\, d\Phi\, d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \left[2(1-\cos\Phi)^{1/2}\right]_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Solución 2. Para calcular directamente $\oint_C F \cdot dr$, observemos que la curva frontera de S orientada por la normal exterior verifica $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde C_1 está contenida en el semiplano $\theta = \pi/2$, la curva C_2 en el semiplano $\theta = 0$ y C_2 en el plano $\Phi = \pi/2$, todas ellas con orientación antihoraria.

Parametrizamos $-C_1$ mediante

$$r_1(\Phi) = S\left(\frac{\pi}{2}, \Phi\right) = (0, \operatorname{sen}\Phi, \cos\Phi), \quad 0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dado que $F(r_1(\Phi)) = (0, \operatorname{sen}\Phi, \cos\Phi)$ y $r_1'(\Phi) = (0, \cos\Phi, -\operatorname{sen}\Phi)$, obtenemos

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}\Phi\cos\Phi - \cos\Phi\operatorname{sen}\Phi)\, d\Phi = 0.$$

Una parametrización de C_2 viene dada por

$$r_2(\Phi) = S(0, \Phi) = (\operatorname{sen}\Phi, 0, \cos\Phi), \quad 0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Entonces $F(r_2(\Phi)) = (\operatorname{sen}\Phi, 0, \cos\Phi)$ y $r_2'(\Phi) = (\cos\Phi, 0, -\operatorname{sen}\Phi)$ implican $\int_{C_2} F \cdot dr = 0$. La curva C_3 se parametriza con

$$r_3(\theta) = S\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Análogamente, $F(r_3(\theta)) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ y $r_3'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$ implican $\int_{C_3} F \cdot dr = 0$. En consecuencia, la integral de línea $\oint_C F \cdot dr = 0$.

El teorema de Stokes asegura que

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot n\, dS.$$

Para aplicarlo, calculamos el rotacional del campo vectorial $F(x, y, z)$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} F = \nabla \times F &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{-3zy + 3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \frac{3xz - 3zx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \frac{-3yx + 3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right) \\
&= (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Entonces,

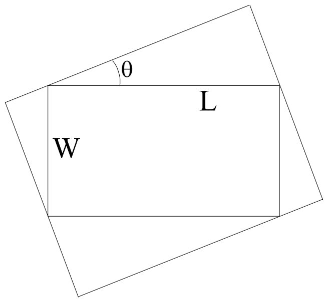
$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S (0, 0, 0) \cdot n\, dS = 0.$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 20 de Enero de 2004

Ejercicio 1. Calcular el área máxima del rectángulo que se puede circunscribir alrededor de un rectángulo dado de longitud L y anchura W.



Solución: Elegimos como variable el ángulo θ en radianes. Entonces, el área del rectángulo circunscrito es

$$A(\theta) = (L\cos\theta + W\operatorname{sen}\theta)(L\operatorname{sen}\theta + W\cos\theta), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Para obtener los puntos críticos, resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= (-L\operatorname{sen}\theta + W\cos\theta)(L\operatorname{sen}\theta + W\cos\theta) \\ &\quad + (L\cos\theta + W\operatorname{sen}\theta)(L\cos\theta - W\operatorname{sen}\theta) \\ &= W^2\cos^2\theta - L^2\operatorname{sen}^2\theta + L^2\cos^2\theta - W^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= L^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) + W^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) \\ &= \left(L^2 + W^2\right)\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) \\ &= \left(L^2 + W^2\right)\cos 2\theta = 0. \end{aligned}$$

Dado que $2\theta \in [0, \pi]$, la única solución de esta ecuación es el punto crítico

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Observemos que si $\theta \in [0, \pi/4)$ entonces $\cos 2\theta > 0$ y $A'(\theta) > 0$. Además, si $\theta \in (\pi/4, \pi/2]$ entonces $\cos 2\theta < 0$ y $A'(\theta) < 0$. En consecuencia, el área máxima del rectángulo circunscrito se alcanza en $\pi/4$ y su valor es

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = (L+W)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{(L+W)^2}{2} = LW + \frac{L^2+W^2}{2}.$$

Ejercicio 2. Sea R la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = 2x - x^2$ y $y = x^3$. Calcular

(a) el área de R,

(b) el volumen que se obtiene al hacer girar R en torno al eje x,

(c) el volumen que se obtiene al hacer girar R en torno al eje y.

Solución: La región definida por las curvas dadas es

$$R = \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \ \ x^3 \leq y \leq 2x - x^2\right\}.$$

(a) El área de R es

$$\begin{aligned} a(R) &= \int_0^1 \left(2x - x^2 - x^3\right) \, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

(b) El volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje x, usando el método de los discos, es

$$\begin{aligned} V_x(R) &= \pi \int_0^1 \left[\left(2x - x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2\right] \, dx = \pi \int_0^1 \left(4x^2 + x^4 - 4x^3 - x^6\right) \, dx \\ &= \pi \left[\frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - x^4 - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \pi \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{5} - 1 - \frac{1}{7}\right) \\ &= \pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \pi \left(\frac{35 + 21 - 15}{105}\right) = \frac{41}{105}\pi. \end{aligned}$$

(c) El volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje y, usando el método de las capas, es

$$\begin{aligned} V_y(R) &= 2\pi \int_0^1 x(2x - x^2 - x^3) \, dx = 2\pi \int_0^1 (2x^2 - x^3 - x^4) \, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\ &= 2\pi \left(\frac{40 - 15 - 12}{60}\right) = \frac{13}{30}\pi. \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1.$$

(a) Obtener la serie de Maclaurin de f y su dominio de convergencia.

(b) Probar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$$

es convergente y calcular su suma integrando f en el intervalo $[0,1]$.

Solución: (a) La derivada de la función f satisface

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \end{aligned}$$

donde $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Integrando $f'(t)$ entre 0 y x, obtenemos

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x t^{2n}\, dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Como $f(0) = 0$, tenemos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

es la serie de Maclaurin de f en $(-1,1)$, debido a su unicidad. Para estudiar la convergencia en los puntos terminales $x = -1$ y $x = 1$, consideramos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

que es divergente por el criterio de comparación por paso al límite con la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. En el segundo punto, la serie es la opuesta de la anterior, por lo que también es divergente. Entonces, el dominio de convergencia es el intervalo abierto $(-1,1)$.

(b) Para analizar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)},$$

usamos el criterio de comparación por paso al límite con la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4},$$

concluimos que la serie es convergente. Integrando f en el intervalo $[0,1]$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) dt &= \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right) dt = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\, dt\right) \\
&= \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.
\end{aligned}$$

Entonces la suma s de la serie se obtiene integrando por partes la función f en el intervalo $[0,1]$. Es decir,

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\left[x\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1-x^2}\, dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[x\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \log\left(1-x^2\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left[x\log(1+x) - x\log(1-x) + \log(1+x) + \log(1-x)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left[(1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left(2\log 2 + \lim_{x\to 1^-} (1-x)\log(1-x)\right) \\
&= \log 2 + \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-} \frac{\log(1-x)}{\frac{1}{1-x}} \\
&= \log 2 + \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{1}{(1-x)^2}} \\
&= \log 2 - \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-} (1-x) \\
&= \log 2.
\end{aligned}$$

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Segundo Examen Parcial. 1 de Junio de 2004

Ejercicio 1. Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)e^{xy}$ en el conjunto

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

Solución: Para obtener los puntos críticos del interior de D, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xe^{xy} + \left(x^2y+y^3\right)e^{xy} = \left(2x+x^2y+y^3\right)e^{xy} = 0, \\ f_y(x,y) &= 2ye^{xy} + \left(x^3+xy^2\right)e^{xy} = \left(2y+x^3+xy^2\right)e^{xy} = 0. \end{aligned}$$

Dado que $e^{xy} > 0$, el sistema es equivalente a

$$\begin{aligned} 2x+x^2y+y^3 &= 0, \\ 2y+x^3+xy^2 &= 0. \end{aligned}$$

Si a la primera ecuación le restamos la segunda, obtenemos

$$(x-y)\left(2-x^2-y^2\right) = 0 \Rightarrow x = y \text{ o bien } x^2+y^2 = 2.$$

Los puntos solución de la ecuación $x^2+y^2 = 2$ pertenecen al exterior de D, por lo que necesariamente $x = y$. Entonces

$$0 = 2x+x^3+x^3 = 2x\left(1+x^2\right),$$

es una ecuación que tiene $x = 0$ como única solución real. En consecuencia, el único punto interior de D candidato a extremo es $P_1 = (0,0)$.

La frontera de D se define con la restricción $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$. Usando el criterio de los multiplicadores de Lagrange, determinamos los puntos solución del sistema $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, resolviendo

$$\begin{aligned} \left(2x+x^2y+y^3\right)e^{xy} &= 2\lambda x, \\ \left(2y+x^3+xy^2\right)e^{xy} &= 2\lambda y, \\ x^2+y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Usando la tercera ecuación, obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} 2x+x^2y+y^3 &= 2x+y\left(x^2+y^2\right) = 2x+y, \\ 2y+x^3+xy^2 &= 2y+x\left(x^2+y^2\right) = 2y+x, \end{aligned}$$

que implican que las dos primeras ecuaciones del sistema son

$$\begin{aligned} (2x+y)\,e^{xy} &= 2\lambda x, \\ (2y+x)\,e^{xy} &= 2\lambda y. \end{aligned}$$

Si a la primera ecuación le restamos la segunda, obtenemos

$$(x-y)\,e^{xy} = 2\lambda\,(x-y) \Rightarrow x = y \text{ o bien } e^{xy} = 2\lambda.$$

En el caso de que $x = y$, la tercera ecuación implica que $2x^2 = 1$, por lo que

$$P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

son dos puntos de la frontera de D candidatos a extremos. Si $e^{xy} = 2\lambda$ entonces $2x + y = x$ implica $y = -x$, que con la tercera ecuación proporciona los puntos

$$P_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_5 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Los valores de la función en dichos puntos son

$$f(P_1) = 0, \quad f(P_2) = f(P_3) = e^{1/2}, \quad f(P_4) = f(P_5) = e^{-1/2}.$$

Entonces, el máximo absoluto se alcanza en P_2 y P_3, mientras que el mínimo absoluto se alcanza en P_1.

Ejercicio 2. Sea C la cardioide de ecuación $r = a(1+\cos\theta)$ orientada positivamente.

(a) Calcular la integral de línea

$$\oint_C \left[\left(x^2+y^2-ax\right)^2 - a^2\left(x^2+y^2-1\right)\right] ds,$$

usando el resultado para obtener la longitud de C.

(b) Calcular la integral de línea

$$\oint_C y\,dx - x\,dy,$$

y utilizarla para deducir el área de la región encerrada por C.

Solución: La cardioide C se parametriza mediante

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = a\cos\theta\,(1+\cos\theta)\,, \\ y &= r\operatorname{sen}\theta = a\operatorname{sen}\theta\,(1+\cos\theta)\,, \end{aligned}$$

donde $0 \le \theta \le 2\pi$. En primer lugar, calculamos

$$\begin{aligned} dx &= -a\left[\operatorname{sen}\theta\,(1+\cos\theta) + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right] d\theta, \\ dy &= a\left[\cos\theta\,(1+\cos\theta) - \operatorname{sen}^2\theta\right] d\theta. \end{aligned}$$

(a) Para calcular la integral de línea del campo escalar dado, evaluamos

$$x^2+y^2-ax = a^2(1+\cos\theta)^2 - a^2\cos\theta\,(1+\cos\theta) = a^2(1+\cos\theta)\,,$$

igualdad que implica

$$\left(x^2+y^2-ax\right)^2 - a^2\left(x^2+y^2-1\right) = a^4(1+\cos\theta)^2 - a^2\left[a^2(1+\cos\theta)^2 - 1\right] = a^2.$$

Además, tenemos que

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = a\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta.$$

Entonces

$$\oint_C \left[\left(x^2+y^2-ax\right)^2 - a^2\left(x^2+y^2-1\right)\right] ds = \int_0^{2\pi} a^3\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta.$$

Para calcular una primitiva, usamos

$$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sqrt{2+2\cos\theta} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \begin{cases} 2\cos\frac{\theta}{2} & \text{si } 0 \le \theta \le \pi, \\ -2\cos\frac{\theta}{2} & \text{si } \pi \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\int_0^{2\pi} a^3\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta = 2a^3\left(\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta - \int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\right)$$
$$= 2a^3\left(\left[2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} - \left[2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = 8a^3.$$

La longitud de la cardioide dada es

$$l(C) = \oint_C ds = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta = 8a.$$

(b) La integral de línea del campo vectorial dado es

$$\oint_C y\,dx - x\,dy = \int_0^{2\pi}\left[-a^2\operatorname{sen}^2\theta\,(1+\cos\theta)^2 - a^2\cos^2\theta\,(1+\cos\theta)^2\right]\,d\theta$$
$$= -a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta = -a^2\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)\,d\theta$$
$$= -a^2\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\,d\theta$$
$$= -a^2\left[\frac{3\theta}{2}+2\operatorname{sen}\theta+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = -3\pi a^2.$$

El área de la región encerrada por la cardioide es

$$a = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Ejercicio 3. Consideremos el sólido

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \ \ 0 \leq z \leq y, \ \ x^2 + y^2 \leq 4 \right\},$$

y sea S la superficie cerrada que limita a V.

(a) Calcular el área de la parte cilíndrica S_1 de la superficie S.

(b) Calcular directamente el flujo de salida del campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

a través de la superficie cerrada S.

(c) Calcular el flujo citado aplicando el teorema de la divergencia.

Solución: (a) La parte cilíndrica de la superficie S se define mediante

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \ \ 0 \leq z \leq y, \ \ x^2 + y^2 = 4 \right\}.$$

Usando coordenadas cilíndricas $x = r \cos \theta, \ \ y = r \operatorname{sen} \theta, \ \ z = z$, obtenemos

$$S_1(\theta, z) = (2 \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \theta, z), \ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \ \ 0 \leq z \leq 2 \operatorname{sen} \theta.$$

El producto vectorial fundamental es

$$(S_1)_\theta \times (S_1)_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 \operatorname{sen} \theta & 2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \theta, 0),$$

y tiene la norma $\|(S_1)_\theta \times (S_1)_z\| = \sqrt{4} = 2$. Entonces, el área

$$a(S_1) = \iint_{S_1} dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} 2 \, dz \, d\theta = \int_0^{\pi/2} 4 \operatorname{sen} \theta \, d\theta = [-4 \cos \theta]_0^{\pi/2} = 4.$$

(b) Calculamos el flujo de salida del campo a través de las cuatro partes de S, que son la parte cilíndrica S_1, la tapa superior S_2, el triángulo lateral S_3, y la base S_4.

En el punto $S_1(0, 0) = (2, 0, 0)$, el producto $(S_1)_\theta \times (S_1)_z (0, 0) = (2, 0, 0)$, por lo que tiene la dirección exterior. El flujo de salida a través de S_1 es

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F \cdot N \, dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} (2 \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \theta, z) \cdot (2 \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \theta, 0) \, dz \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} 4 \, dz \, d\theta = \int_0^{\pi/2} 8 \operatorname{sen} \theta \, d\theta = [-8 \cos \theta]_0^{\pi/2} = 8. \end{aligned}$$

La tapa superior S_2 verifica $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = y \geq 0$, y $x \geq 0$. Una parametrización es $S_2(x, y) = (x, y, y)$ donde $(x, y) \in D$, siendo

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Calculamos el vector

$$(S_2)_x \times (S_2)_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1),$$

que tiene la dirección exterior al plano. El flujo de salida a través de S_2 es

$$\iint_{S_2} F \cdot N \, dS = \iint_D (x, y, y) \cdot (0, -1, 1) \; dx \, dy = 0.$$

El triángulo lateral S_3 está contenido en el plano $x = 0$ y verifica las desigualdades $0 \leq y \leq 2, \;\; 0 \leq z \leq y$. Parametrizamos $S_3(y, z) = (0, y, z)$, luego

$$(S_3)_y \times (S_3)_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 0),$$

que tiene la dirección interior al plano (cambiamos el signo). Entonces

$$\iint_{S_3} F \cdot N \, dS = -\int_0^2 \int_0^y (0, y, z) \cdot (1, 0, 0) \; dz \, dy = 0.$$

La base S_4 está contenido en $z = 0$, verificando $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$, y $x \geq 0$. Una parametrización es $S_4(x, y) = (x, y, 0)$ donde $(x, y) \in D$. El producto vectorial fundamental es

$$(S_4)_x \times (S_4)_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1),$$

que tiene la dirección interior al plano (cambiamos el signo). Entonces

$$\iint_{S_4} F \cdot N \, dS = -\iint_D (x, y, 0) \cdot (0, 0, 1) \; dx \, dy = 0.$$

En consecuencia, el flujo de salida del campo F a través de S es

$$\iint_S F \cdot N \, dS = 8.$$

(c) El teorema de la divergencia de Gauss afirma que *el flujo de salida del campo F a través de S coincide con la integral triple de la divergencia de F*, es decir

$$\iint_S F \cdot N \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz.$$

Calculamos $\operatorname{div} F = 3$, y usando coordenadas cilíndricas

$$V = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 2 \;\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \;\; 0 \leq z \leq r \operatorname{sen} \theta \right\}.$$

Como el jacobiano del cambio de variables es r, la integral triple pedida verifica

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz &= 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{r \operatorname{sen} \theta} r \, dz \, dr \, d\theta = 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} 8 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \\ &= [-8 \cos \theta]_0^{\pi/2} = 8. \end{aligned}$$

Cálculo. Primer curso de Ingenieros de Telecomunicación.
Curso 2001-2002. Examen de Septiembre. 6 de Septiembre de 2002.

Primera parte

Ejercicio 1.
Un canal abierto cuya sección es un trapecio isósceles de bases horizontales, tiene sus paredes laterales formando un angulo agudo dado α con la base menor del fondo. Conociendo el área A de dicha sección, hallar la profundidad h del canal para la cual la suma de longitudes de la base y paredes laterales es mínima.

Ejercicio 2.
Se considera la función $f(x) = \log(4 + x^2)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Obtener la serie de MacLaurin de f, especificando su dominio de convergencia.

Ejercicio 3.
Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^\infty \dfrac{7x+3}{x^a(1+x^3)}\, dx$ según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

Segunda parte

Ejercicio 4.
Calcular los extremos absolutos de la función $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$ en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Ejercicio 5.
Se considera el sólido V limitado por la superficie cilíndrica $x^2+y^2 = 2y$ y los planos $z = 0$, $y+z = 2$, . Calcular el flujo de salida del campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2 + \sin z, xy + \cos z, e^y)$ a través de la frontera S de V.

Ejercicio 6.
Sea S_1 la porción de $x^2 + y^2 = 2y$ comprendida entre $y + z = 2$ y $z = 0$. Obtener su área.

Ejercicio 1.

Un canal abierto cuya sección es un trapecio isósceles de bases horizontales, tiene sus paredes laterales formando un angulo agudo dado α con la base menor del fondo. Conociendo el área A de dicha sección, hallar la profundidad h del canal para la cual la suma de longitudes de la base y paredes laterales es mínima.

Resolución

Llamemos B y b a las bases mayor y menor respectivamente del trapecio sección y c a la longitud de su lado inclinado, correspondiente a la pared lateral del canal. La tangente del ángulo α será $\tan\alpha = \dfrac{h}{\left(\frac{B-b}{2}\right)}$ y su seno $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{c}$. Tendremos que para el área se tendrá $A = \dfrac{(B+b)}{2}h$. Entonces tenemos:

$$B - b = \frac{2h}{\tan\alpha}, \quad B + b = \frac{2A}{h}$$

de donde restando resulta $b = \dfrac{A}{h} - \dfrac{h}{\tan\alpha}$ y, despejando el valor de c en la expresión del $\operatorname{sen}\alpha$, se obtiene $c = \dfrac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$. La función a minimizar es, por lo tanto,

$$f(h) = b + 2c = \frac{A}{h} - \frac{h}{\tan\alpha} + \frac{2h}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{A}{h} + h\left(\frac{2-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)$$

en el intervalo $[0, H]$ donde H corresponde a la altura máxima posible (máxima profundidad posible para el canal) que se obtiene cuando la sección es triangular y $b = 0$, es decir, para $H = \sqrt{A\tan\alpha}$.

El problema se reduce ahora a determinar los puntos críticos de $f(h)$ en el intervalo $\left(0, \sqrt{A\tan\alpha}\right)$ y analizarlos junto a los extremos de dicho intervalo. Observemos que f es derivable salvo en 0, por lo que los únicos puntos críticos interiores al intervalo serán los ceros de la derivada:

$$f'(h) = 0 \iff \frac{-A}{h^2} + \left(\frac{2-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = 0 \iff h^2 = \frac{A\operatorname{sen}\alpha}{2-\cos\alpha}$$

El único punto crítico interior se presenta en $h_0 = \sqrt{\dfrac{A\operatorname{sen}\alpha}{2-\cos\alpha}}$, que es menor que $\sqrt{A\tan\alpha}$ ya que $\cos\alpha < 1 < 2 - \cos\alpha$, $\forall\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Puesto que $f''(h) = \dfrac{2A}{h^3} > 0$ en todo el intervalo $\left(0, \sqrt{A\tan\alpha}\right)$, se trata de un mínimo absoluto en $\left[0, \sqrt{A\tan\alpha}\right]$. Por tanto la profundidad pedida es

$$h_0 = \sqrt{\frac{A\operatorname{sen}\alpha}{2-\cos\alpha}}$$

Ejercicio 2.

Se considera la función $f(x) = \log(4 + x^2)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Obtener la serie de MacLaurin de f, especificando su dominio de convergencia.

Resolución.

La función dada es derivable en todo $\mathbb{R}$ y su derivada es $f'(x) = \dfrac{2x}{4+x^2} = \dfrac{x/2}{1+(x/2)^2}$ que, para $\left|\dfrac{x}{2}\right| < 1$ o, lo que es igual, para $|x| < 2$, es la suma de una serie geométrica de primer término $x/2$ y razón $-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$. Puesto que las derivadas sucesivas de la función tienen expresiones cada vez más complicadas, obtendremos la serie de Maclaurin de f a partir de la de su derivada, que será la serie geométrica citada:

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \left(\frac{x}{2}\right)^7 + \left(\frac{x}{2}\right)^9 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$$

cuyo radio de convergencia es 2, puesto que converge para $|x| < 2$, como hemos dicho.

Integrando la serie anterior término a termino y determinando en la forma acostumbrada el valor de la constante de integración, se obtiene, para $|x| < 2$,

$$\begin{aligned} f(x) &= k + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2^3}\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2^5}\frac{x^6}{6} - \cdots = k + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^{2n+1}}\frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \\ &= f(0) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n+1}}\frac{x^{2n+2}}{2(n+1)} = \\ &= \log(4) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)}\frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}} \end{aligned}$$

El radio de convergencia es 2, el mismo de la serie de la que procede. Estudiaremos el comportamiento en los extremos. Observemos que para $x = -2$ y para $x = 2$ la serie toma el mismo valor por aparecer solo potencias pares de x. Por ejemplo para $x = 2$ resulta la serie

$$\log(4) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)}$$

que es obviamente convergente por el criterio de Leibnitz para series alternadas. Por tanto el dominio de convergencia de esta serie es el intervalo cerrado [-2,2].

Ejercicio 3.

Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^\infty \dfrac{7x+3}{x^a(1+x^3)}\,dx$ según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

Resolución.

La integral presenta problemas en 0 e infinito puesto que el punto -1, que es el otro punto problemático del integrando, queda fuera del intervalo de integración. Asi pues, para estudiar la convergencia, descomponemos la integral dada en dos, por ejemplo

$$\int_0^\infty \frac{7x+3}{x^a(1+x^3)}\,dx = \int_0^1 \frac{7x+3}{x^a(1+x^3)}\,dx + \int_1^\infty \frac{7x+3}{x^a(1+x^3)}\,dx = I_1 + I_2$$

Para la primera de ambas integrales, I_1, observamos que, para valores de x proximos a 0, el integrando se comporta como $\dfrac{3}{x^a}$. Utilizaremos el criterio de comparación por paso al límite con la integral $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^a}$, cuyo comportamiento conocemos. Calculamos el límite

$$\lim_{x->0} \frac{\left(\dfrac{7x+3}{x^a(1+x^3)}\right)}{\left(\dfrac{1}{x^a}\right)} = \lim_{x->0} \frac{7x+3}{1+x^3} = 3 \neq 0$$

para concluir que ambas integrales tienen el mismo carácter. Deducimos que nuestra integral I_1 converge si, y solo si, es $\alpha < 1$.

Para la segunda de las integrales, I_2, observamos que, para valores muy grandes y positivos de x, el integrando se comporta como $\dfrac{7x}{x^a(x^3)} = \dfrac{7x}{x^{a+3}} = \dfrac{7}{x^{a+2}}$. De forma analoga a la anterior, deducimos que nuestra integral tiene el mismo carácter que $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^{a+2}}$ ya que

$$\lim_{x->+\infty} \frac{\left(\dfrac{7x+3}{x^a(1+x^3)}\right)}{\left(\dfrac{1}{x^{a+2}}\right)} = \lim_{x->+\infty} \frac{x^2\,(7x+3)}{1+x^3} = 7 \neq 0$$

por lo que I_2 converge si, y solo si, $a+2>1$, es decir, $a>-1$.

Finalmente La integral dada converge cuando lo hagan simultáneamente I_1 e I_2, o sea, para $-1 < \alpha < 1$.

Ejercicio 4.

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$ en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Resolución.

Analizaremos en primer lugar el interior del conjunto A, determinando los puntos criticos de la función existentes en él. La función dada es diferenciable en todo el plano y se tiene

$$\begin{aligned} f_x &= 8x - 2xy^2 = 2x(4 - y^2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ o } y = \pm 2 \\ f_y &= 18y - 2x^2y = 2y(9 - x^2) = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \text{ o } x = \pm 3 \end{aligned}$$

luego los puntos criticos de la función son (0,0), (3,2), (3,-2), (-3,2), (-3,-2), de los cuales únicamente el origen queda dentro de nuestro conjunto. Solamente nos interesan los extremos absolutos, por tanto guardaremos por ahora el punto $P_1 = (0,0)$ junto con el valor de la función $f(0,0) = 0$ y pasaremos a analizar la frontera de A utilizando multiplicadores de Lagrange par obtener los posibles puntos donde se alcanzan extremos de la función f con la restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Debemos resolver

$$\begin{aligned} f_x - \lambda g_x &= 2x(4 - y^2) - 2\lambda x = 2x(4 - y^2 - \lambda) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ o } 4 - \lambda = y^2 \\ f_y - \lambda g_y &= 2y(9 - x^2) - 2\lambda y = 2y(9 - x^2 - \lambda) = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \text{ o } 9 - \lambda = x^2 \\ g &= x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de este sistema son $P_2 = (0,2)$, $P_3 = (0,-2)$, (ambas correspondientes a $\lambda = 9$), $P_4 = (2,0)$, $P_5 = (-2,0)$, (ambas correspondientes a $\lambda = 4$), ya que para $9 - \lambda = x^2, 4 - \lambda = y^2, x^2 + y^2 = 4$ no hay solución real.

Puesto que en P_2 y P_3 la función toma el mismo valor $f(0,\pm 2) = 36$ y análogamente ocurre en P_4 y P_5, donde $f(\pm 2, 0) = 16$, concluimos que el mínimo absoluto se alcanza en el origen, punto del interior del conjunto, y el máximo absoluto se alcanza en los dos puntos P_2 y P_3.

Ejercicio 5.

Se considera el sólido V limitado por la superficie cilíndrica $x^2+y^2=2y$ y los planos $z=0$, $y+z=2$, . Calcular el flujo de salida del campo vectorial $F(x,y,z)=(x^2+\sin z, xy+\cos z, e^y)$ a través de la frontera S de V.

Resolución.

Puesto que la superficie frontera del sólido tiene tres partes, el cálculo del flujo de salida requiere tres integrales de superficie. Además, el campo dado tiene una expresión complicada, mientras que su divergencia resulta muy simple:

$$\operatorname{div}(F) = F_x + F_y + F_z = 2x + x + 0 = 3x$$

Por todo ello se hace especialmente aconsejable utilizar el teorema de Gauss

$$\iint_S F\cdot n\, dS = \iiint_V \operatorname{div}(F)\, dxdydz$$

Necesitamos describir el sólido para tener los extremos de las integrales reiteradas mediante las cuales calcularemos esa integral triple. Completando el cuadrado, la ecuación de la superficie cilíndrica dada puede escribirse como $x^2+(y-1)^2=1$. La proyección del sólido sobre el plano OXY es la circunferencia de centro (0,1) y radio 1 y z se mueve entre los dos planos dados, luego una posible descripción es

$$V \equiv \left\{ \begin{array}{c} 0 \le y \le 2 \\ -\sqrt{2y-y^2} \le x \le \sqrt{2y-y^2} \\ 0 \le z \le 2-y \end{array} \right.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div}(F)\, dxdydz &= \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \int_0^{2-y} 3x\, dz\, dx\, dy = \\ &= \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} (2-y)\, 3x\, dx\, dy = \\ &= \int_0^2 (2-y) \left(\left[\frac{3x^2}{2}\right]_{x=-\sqrt{2y-y^2}}^{x=\sqrt{2y-y^2}} \right) dy = 0 \end{aligned}$$

ya que $\left[\frac{3x^2}{2}\right]_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} = 0$.

Ejercicio 6.

Sea S_1 la porción de $x^2 + y^2 = 2y$ comprendida entre $y + z = 2$ y $z = 0$. Obtener su área.

Resolución.

El área de la superficie viene dada por

$$\iint_{S_1} dS = \iint_D \|r_u \times r_v\| \, du \, dv$$

donde $r = r(u, v)$ representa el vector posición de un punto de la superficie en función de dos parametros adecuadamente elegidos y D es el recinto donde esos parámetros se han de mover.

Comenzaremos parametrizando la superficie $x^2+y^2 = 2y$, o, equivalentemente, $x^2+(y-1)^2 = 1$. Puesto que se trata de un cilindro vertical, un parámetro basta para describir la ecuación (que tambien es la de la curva proyección) y el otro se deberá usar para describir la z. Una de las posibles parametrizaciones es

$$S_1 \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = \cos(u) \\ y = 1 + \operatorname{sen}(u) \\ z = v \end{array} \right. \qquad (u, v) \in D \equiv \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq 2 - (1 + \operatorname{sen}(u)) \end{array} \right.$$

Resulta

$$r_u \times r_v = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(u) \\ \cos(u) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(u) \\ \operatorname{sen}(u) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|r_u \times r_v\| = 1$$

Por lo que el área pedida vale

$$\iint_D du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\operatorname{sen}(u)} dv \, du = \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{sen}(u)) \, du = 2\pi.$$

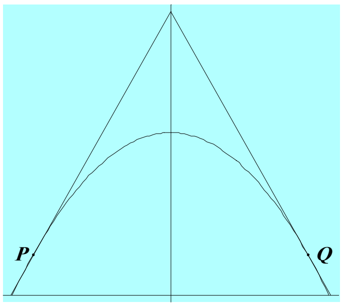
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen, 7 de Septiembre de 2004

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Calcular las coordenadas de los puntos P y Q de la parábola $y = 1 - x^2$, tales que el triángulo formado por el eje x y las rectas tangentes a la parábola en P y Q sea equilátero.



Solución. La pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 1 - x^2$ en el punto (x, y) es $y' = -2x$, por lo que la ecuación de dicha recta tangente es $Y - y = -2x\,(X - x)$. El punto intersección de esta recta con el eje y tiene las siguientes coordenadas

$$X = 0, \quad Y = y + 2x^2 = 1 - x^2 + 2x^2 = 1 + x^2.$$

Las coordenadas del punto intersección de la recta tangente con el eje x son

$$Y = 0, \quad X = x + \frac{y}{2x} = \frac{2x^2 + 1 - x^2}{2x} = \frac{1 + x^2}{2x}, \;\; x \neq 0.$$

Observemos que en el caso $x = 0$, la recta tangente es $Y = 1$, que no forma triángulo. Dado que los tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales a $\pi/3$, tenemos que

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{1 + x^2}{\dfrac{1 + x^2}{2x}} = 2x \;\text{ si }\; x > 0 \Longleftrightarrow \sqrt{3} = 2x \;\text{ si }\; x > 0,$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{1 + x^2}{-\dfrac{1 + x^2}{2x}} = -2x \;\text{ si }\; x < 0 \Longleftrightarrow \sqrt{3} = -2x \;\text{ si }\; x < 0.$$

Entonces las abcisas de los puntos P y Q son $-\sqrt{3}/2$ y $\sqrt{3}/2$. El valor de la ordenada es

$$y = 1 - \left(\frac{\pm\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Las coordenadas de los puntos son $P = \left(-\sqrt{3}/2, 1/4\right)$ y $Q = \left(-\sqrt{3}/2, 1/4\right)$.

Ejercicio 2. Calcular el valor de la integral impropia

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n \, dx,$$

donde n es un entero positivo.

Solución. Usaremos la fórmula de integración por partes con $u = (\ln x)^n$ y $dv = dx$, obteniendo $du = n (\ln x)^{n-1} x^{-1} \, dx$ y $v = x$. Entonces

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (\ln x)^n \, dx = \lim_{a \to 0} \int_a^1 (\ln x)^n \, dx \\ &= \lim_{a \to 0} \left[x (\ln x)^n \right]_a^1 - n \lim_{a \to 0} \int_a^1 (\ln x)^{n-1} \, dx \\ &= - \lim_{a \to 0} \left[a (\ln a)^n \right] - n I_{n-1}. \end{aligned}$$

Calculamos el límite usando la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned} \lim_{a \to 0} \left[a (\ln a)^n \right] &= \lim_{a \to 0} \frac{(\ln a)^n}{\frac{1}{a}} = \lim_{a \to 0} \frac{n (\ln a)^{n-1} a^{-1}}{-\frac{1}{a^2}} = \lim_{a \to 0} \frac{n (\ln a)^{n-1}}{-\frac{1}{a}} \\ &= \lim_{a \to 0} \frac{n (n-1) (\ln a)^{n-2} a^{-1}}{(-1)^2 \frac{1}{a^2}} \\ &= (-1)^2 n (n-1) \lim_{a \to 0} \frac{(\ln a)^{n-2}}{\frac{1}{a}}. \end{aligned}$$

Reiterando la aplicación de esta regla,

$$\begin{aligned} \lim_{a \to 0} \frac{(\ln a)^n}{\frac{1}{a}} &= (-1)^{n-1} n! \lim_{a \to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{a}} = (-1)^{n-1} n! \lim_{a \to 0} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} \\ &= (-1)^n n! \lim_{a \to 0} a = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$I_n = -n I_{n-1} = (-1)^2 n (n-1) I_{n-2} = \cdots = (-1)^{n-1} n! I_1.$$

Finalmente, usando de nuevo integración por partes con $u = \ln x$ y $dv = dx$,

$$I_1 = \int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{a \to 0} \left[x \ln x \right]_a^1 - \int_0^1 dx = -1,$$

lo que implica que $I_n = (-1)^n n!$ para cualquier entero positivo n.

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen, 7 de Septiembre de 2004
SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Hallar el máximo y el mínimo absolutos de la función

$$f(x,y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) - \int_0^x \frac{2t}{1+t^4}\,dt,$$

en el conjunto $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\right\}.$

Solución. En primer lugar, obtenemos los puntos críticos del interior de D, resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2x}{1+x^2+y^2} - \frac{2x}{1+x^4} = \frac{2x^5 - 2x^3 - 2xy^2}{1+x^2+y^2+x^4+x^6+x^4y^2} = 0, \\ f_y(x,y) &= \frac{2y}{1+x^2+y^2} = 0. \end{aligned}$$

La segunda ecuación implica $y = 0$, luego la primera implica $x^5 - x^3 = 0$ y obtenemos

$$x^3\left(x^2 - 1\right) = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = \pm 1.$$

Entonces, los puntos interiores de D candidatos a extremos son

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (1,0), \quad P_3 = (-1,0).$$

La frontera de D se define con $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Aplicando el criterio de los multiplicadores de Lagrange, calculamos los puntos solución del sistema $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, resolviendo

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1+x^2+y^2} - \frac{2x}{1+x^4} &= 2\lambda x, \\ \frac{2y}{1+x^2+y^2} &= 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 &= 4. \end{aligned}$$

Si $x = 0$, la tercera ecuación implica que $y^2 = 4$, por lo que $P_4 = (0,2)$ y $P_5 = (0,-2)$ son dos puntos de la frontera de D candidatos a extremos. En el caso $x \neq 0$, hay dos posibilidades. La primera es que $y = 0$, luego $x^2 = 4$, obteniendo $P_6 = (2,0)$ y $P_7 = (-2,0)$. La segunda es que $y \neq 0$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{1}{1+x^4} &= \lambda, \\ \frac{1}{1+x^2+y^2} &= \lambda. \end{aligned}$$

Ambas ecuaciones implican $-\dfrac{1}{1+x^4}=0$, que es una contradicción, luego no existen soluciones con ambas coordenadas no nulas.

Los valores de la función en los puntos obtenidos son

$$
\begin{aligned}
&f(P_1)=\ln(1)=0,\\
&f(P_2)=\ln(2)-\int_0^1 \frac{2t}{1+t^4}\,dt=\ln(2)-\left[\arctan t^2\right]_0^1=\ln(2)-\frac{\pi}{4}=-0.09225,\\
&f(P_3)=\ln(2)-\int_0^{-1} \frac{2t}{1+t^4}\,dt=\ln(2)+\int_{-1}^{0} \frac{2t}{1+t^4}\,dt\\
&\qquad\quad=\ln(2)+\left[\arctan t^2\right]_{-1}^{0}=\ln(2)-\frac{\pi}{4}=-0.09225,\\
&f(P_4)=f(P_5)=\ln(5)=1.6094,\\
&f(P_6)=f(P_7)=\ln(5)-\arctan 4=0.28362.
\end{aligned}
$$

Entonces, el mínimo absoluto se alcanza en P_2 y P_3, y el máximo absoluto en P_4 y P_5.

Ejercicio 4. Sea V el sólido definido por

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; z \geq 0, \;\; y + z \leq 4, \;\; x \leq 6 \right\},$$

y sea S la superficie cerrada que limita a V. Calcular, directamente y mediante el teorema de Gauss, el flujo de salida a través de S del campo vectorial $F(x, y, z) = (xe^z, ye^z, e^z)$.

Solución. Calculamos el flujo de salida del campo a través de las cinco partes de S, que son los triángulos S_1 (contenido en el plano $x = 0$) y S_2 (contenido en el plano $x = 6$), los rectángulos S_3 (contenido en el plano $y = 0$) y S_4 (contenido en el plano $z = 0$), y la tapa superior S_5 (contenida en el plano $y + z = 4$).

Parametrizamos S_1 mediante $S_1(y, z) = (0, y, z)$, donde $y \geq 0$, $z \geq 0$, $y + z \leq 4$. La normal exterior es $(-1, 0, 0)$ y el flujo de salida a través de S_1 es

$$\iint_{S_1} F \cdot N \, dS = \int_0^4 \int_0^{4-y} (0, ye^z, e^z) \cdot (-1, 0, 0) \; dz \, dy = 0.$$

Una parametrización del triángulo S_2 es $S_2(y, z) = (6, y, z)$ donde $y \geq 0$, $z \geq 0$, $y + z \leq 4$. El flujo de salida a través de S_2 es

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} F \cdot N \, dS &= \int_0^4 \int_0^{4-y} (6e^z, ye^z, e^z) \cdot (1, 0, 0) \; dz \, dy \\ &= \int_0^4 \int_0^{4-y} 6e^z \, dz \, dy = 6 \int_0^4 \left(e^{4-y} - 1 \right) \, dy \\ &= 6 \left[-e^{4-y} - y \right]_0^4 = 6 \left(-1 - 4 + e^4 \right) = 6e^4 - 30. \end{aligned}$$

El rectángulo S_3 se parametriza con $S_3(x, z) = (x, 0, z)$, donde $0 \leq x \leq 6$, $0 \leq z \leq 4$ y la normal exterior es $(0, -1, 0)$. El flujo de salida a través de S_3 es

$$\iint_{S_3} F \cdot N \, dS = \int_0^6 \int_0^4 (xe^z, 0, e^z) \cdot (0, -1, 0) \; dz \, dx = 0.$$

El rectángulo S_4 se parametriza con $S_4(x, y) = (x, y, 0)$, donde $0 \leq x \leq 6$, $0 \leq y \leq 4$ y la normal exterior es $(0, 0, -1)$. El flujo de salida a través de S_4 es

$$\iint_{S_4} F \cdot N \, dS = \int_0^6 \int_0^4 (x, y, 1) \cdot (0, 0, -1) \; dy \, dx = -\int_0^6 \int_0^4 dy \, dx = -24.$$

La tapa superior S_5 está contenida en el plano $y + z = 4$, siendo $y \geq 0$, $z \geq 0$, $0 \leq x \leq 6$. Por tanto $y = 4 - z \geq 0$ lo que implica $0 \leq z \leq 4$. Una parametrización de S_5 es $S_5(x,z) = (x, 4-z, z)$, donde $0 \le x \le 6$, $0 \le z \le 4$ y el producto vectorial fundamental es

$$(S_5)_x \times (S_5)_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, -1),$$

que tiene la dirección interior al sólido (cambiamos el signo). Entonces

$$\begin{aligned}\iint_{S_5} F \cdot N\, dS &= \int_0^6 \int_0^4 \left(xe^z, (4-z)\, e^z, e^z\right) \cdot (0,1,1)\; dx\, dz \\ &= \int_0^6 \int_0^4 (5-z)\, e^z\, dx\, dz \\ &= \int_0^6 \left(5\left[e^z\right]_0^4 - \left[ze^z\right]_0^4 + \left[e^z\right]_0^4\right)\, dx \\ &= \int_0^6 \left(2e^4 - 6\right)\, dx = 12e^4 - 36,\end{aligned}$$

usando la fórmula de integración por partes.

En consecuencia, el flujo de salida del campo F a través de S es

$$\begin{aligned}\iint_S F \cdot N\, dS &= 6e^4 - 30 - 24 + 12e^4 - 36 \\ &= 18e^4 - 90 = 18\left(e^4 - 5\right).\end{aligned}$$

El teorema de Gauss afirma que *el flujo de salida del campo F a través de S coincide con la integral triple de la divergencia de F*, es decir

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \iiint_V \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz.$$

Calculamos $\operatorname{div} F = 3e^z$, y el valor de la integral triple es

$$\begin{aligned}\iiint_V \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz &= 3\int_0^6 \int_0^4 \int_0^{4-y} e^z\, dz\, dy\, dx \\ &= 3\int_0^6 \int_0^4 \left(e^{4-y} - 1\right)\, dy\, dx \\ &= 3\int_0^6 \left[-e^{4-y} - y\right]_0^4\, dx \\ &= 3\int_0^6 \left(-1 - 4 + e^4\right)\, dx \\ &= 18\left(e^4 - 5\right).\end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 5 de Julio de 2005

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Encontrar el área mínima de la región del primer cuadrante del plano cuyas fronteras están contenidas en la recta que pasa por el punto $(3,5)$ y las rectas $x=0$, $y=0$.

Solución. La ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,5)$ es $y-5=m(x-3)$. Si la pendiente $m<0$, entonces esta recta y los ejes $x=0$, $y=0$ determinan un triángulo situado en el primer cuadrante del plano. En el caso $m>0$, las regiones que determinan las tres rectas no pertenecen al primer cuadrante o degeneran en un punto. Los casos especiales dados por las rectas $x=3$, $y=5$, son regiones con área infinita. En consecuencia, la pendiente satisface la condición $m<0$.

Para calcular el área del triángulo es suficiente obtener las coordenadas de los puntos intersección de la recta que pasa por el punto $(3,5)$ y las rectas $x=0$, $y=0$. Para obtener la coordenada y del primer punto, resolvemos $y-5=-3m$, obteniendo $y=5-3m$. La coordenada x del segundo punto viene dada por

$$-5=m(x-3)\Rightarrow x-3=-\frac{5}{m}\Rightarrow x=3-\frac{5}{m}=\frac{3m-5}{m}.$$

Entonces, el área del triángulo es

$$A(m)=\frac{1}{2}(5-3m)\left(\frac{3m-5}{m}\right)=-\frac{1}{2}\frac{(5-3m)^2}{m},\quad m<0.$$

A continuación, calculamos los puntos críticos mediante

$$\begin{aligned}A'(m)&=-\frac{1}{2}\left[\frac{2(5-3m)(-3)m-(5-3m)^2}{m^2}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{(5-3m)(5+3m)}{m^2}\right]=0.\end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación son $m_1=5/3>0$ y $m_2=-5/3<0$, siendo m_2 la única solución que pertenece al dominio de definición del área $A(m)$.

Para probar que $A(m)$ alcanza su valor mínimo en $m_2=-5/3$, usaremos el criterio de la primera derivada. Si $m<-5/3$ entonces $5+3m<0$ y $5-3m>0$ porque $m<0$. Por tanto $A'(m)<0$ y el área es decreciente a la izquierda de $-5/3$. Si $m>-5/3$ entonces $5+3m>0$ y $5-3m>0$ porque $m<0$. Por tanto $A'(m)>0$ y el área es creciente a la derecha de $-5/3$. Así concluimos que el área mímima es

$$A\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{2}\frac{(5+5)^2}{(-5/3)}=30.$$

Ejercicio 2.

(a) Aproximar el valor de la integral $\int_1^2 \frac{x}{x-\operatorname{sen} x}\,dx$, mediante la regla de Simpson dividiendo el intervalo en cuatro partes iguales.

(b) Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x-\operatorname{sen} x}\,dx$, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución. (a) Si dividimos el intervalo $[1,2]$ en $n = 4$ subintervalos con la misma longitud $h = 0.25$, los puntos terminales de los subintervalos son $x_0 = 1, \quad x_1 = 1.25, \quad x_2 = 1.5, \quad x_3 = 1.75, \quad x_4 = 2$. Entonces, la regla de Simpson es

$$\int_1^2 f(x)\,dx \approx \frac{0.25}{3}\left[f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)\right].$$

En consecuencia, la aproximación del valor de la integral es

$$\int_1^2 \frac{x}{x-\operatorname{sen} x}\,dx \approx 3.321702011.$$

(b) En primer lugar, analizamos la convergencia de la integral impropia

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{x-\operatorname{sen} x}\,dx.$$

Para ello, usamos el criterio de comparación por paso al límite, calculando

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^\alpha}{x-\operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{x^p}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha+p}}{x-\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha+p}}{\dfrac{x^3}{3!}} = 6,$$

si $\alpha + p = 3 \Leftrightarrow p = 3 - \alpha$. Dado que la integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ converge si y sólo si $p < 1$, tenemos que la integral I_1 es convergente si y sólo si $3-\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$.

El criterio de comparación también nos servirá para estudiar la convergencia de la integral impropia

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{x-\operatorname{sen} x}\,dx.$$

Calculamos

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\dfrac{x^\alpha}{x-\operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{x^p}} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^{\alpha+p}}{x-\operatorname{sen} x} = 1,$$

si $\alpha + p = 1 \Leftrightarrow p = 1 - \alpha$. Dado que la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ converge si y sólo si $p > 1$, tenemos que la integral I_2 es convergente si y sólo si $1-\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 0$. Como los intervalos de convergencia para las integrales I_1 y I_2 no tienen puntos comunes, concluimos que no existen valores de α tales que la integral sea convergente.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 5 de Julio de 2005

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Obtener los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = y^3 + x^2y + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 8,$$

en el conjunto $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Solución. En primer lugar, obtenemos los puntos del interior de M, tales que $\nabla f(x,y) = (0,0)$, resolviendo el sistema

$$\left(2xy + 4x, 3y^2 + x^2 + 4y - 4\right) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x(y+2) = 0, \\ 3y^2 + x^2 + 4y - 4 = 0. \end{cases}$$

La primera ecuación implica $x = 0$ o bien $y = -2$. Si $y = -2$, la segunda ecuación implica que $x = 0$, pero el punto $(0,-2)$ no pertenece al interior de M. Si $x = 0$, la segunda ecuación es $3y^2 + 4y - 4 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2/3, \\ -2. \end{cases}$$

Las coordenadas del punto $P_1 = (0, 2/3)$ verifican $4/9 < 1$, por lo que pertenece al interior de M. La frontera de M es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Usando la ecuación de los multiplicadores de Lagrange $\nabla f = \lambda \nabla g$, con la restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, obtenemos

$$\begin{cases} 2x(y+2) = \lambda 2x, \\ 3y^2 + x^2 + 4y - 4 = \lambda 2y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Si $x \neq 0$, entonces $y + 2 = \lambda$, lo que implica que

$$3y^2 + x^2 + 4y - 4 = 2y(y+2) = 2y^2 + 4y \Longleftrightarrow y^2 + x^2 = 4,$$

que contradice la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Entonces $x = 0$, luego $y^2 = 1$, lo que implica que $y = \pm 1$. Por tanto, los puntos $P_2 = (0,1)$ y $P_3 = (0,-1)$ satisfacen las ecuaciones primera y tercera. Para comprobar que también se cumple la segunda ecuación, sustituimos $(x,y) = (0,1)$ y $(x,y) = (0,-1)$ obteniendo $\lambda = 3/2$ y $\lambda = 5/2$, respectivamente.

Los valores de la función en los tres puntos obtenidos son

$$\begin{aligned} f(P_1) &= f((0,2/3)) = \frac{8}{27} + \frac{8}{9} - \frac{8}{3} - 8 = -\frac{256}{27} \approx -9.48148, \\ f(P_2) &= f(0,1) = 1 + 2 - 4 - 8 = -9, \\ f(P_3) &= f(0,-1) = -1 + 2 + 4 - 8 = -3. \end{aligned}$$

En consecuencia, el máximo absoluto se alcanza en P_3, mientras que el mínimo absoluto se alcanza en P_1.

Ejercicio 4. Calcular directamente y usando el teorema de Stokes la integral de línea

$$\oint_C x\,dx + yz^2\,dy + xz\,dz,$$

donde C es la curva dada por la intersección de las superficies

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, & z\geq 0,\\ x^2+y^2=y. \end{cases}$$

Solución. Para calcular directamente la integral de línea, parametrizamos la curva C usando coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$. Entonces, las ecuaciones de las superficies que definen la curva C son

$$\begin{cases} z=\sqrt{1-r^2},\\ r=\mathrm{sen}\,\theta, \end{cases}$$

donde $0\leq\theta\leq\pi$, y la ecuación de la curva es

$$C(\theta)=\left(\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta, \mathrm{sen}^2\,\theta, \sqrt{1-\mathrm{sen}^2\,\theta}\right),\quad 0\leq\theta\leq\pi,$$

siendo su orientación anti-horaria. Calculamos la integral de línea

$$\begin{aligned}
I &= \oint_C x\,dx + yz^2\,dy + xz\,dz\\
&= \int_0^\pi\left[\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2\theta\cos 2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta\left(1-\mathrm{sen}^2\,\theta\right)2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta\cos^2\theta\right]d\theta\\
&= \int_0^\pi\left[\frac{1}{4}\mathrm{sen}\,4\theta + 2\,\mathrm{sen}^3\,\theta\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}^5\,\theta\cos\theta - \left(\frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right)^2\right]d\theta\\
&= \int_0^\pi\left[\frac{1}{4}\mathrm{sen}\,4\theta + 2\,\mathrm{sen}^3\,\theta\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}^5\,\theta\cos\theta - \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)\right]d\theta\\
&= \left[-\frac{\cos 4\theta}{16} + \frac{\mathrm{sen}^4\,\theta}{2} - \frac{\mathrm{sen}^6\,\theta}{3} - \frac{\theta}{8} + \frac{\mathrm{sen}\,4\theta}{32}\right]_0^\pi\\
&= -\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

El teorema de Stokes asegura que

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_S \mathrm{rot}\,F\cdot n\,dS,$$

donde S es la porción de la superficie de la semiesfera cuya frontera es la curva C. Una parametrización de S viene dada por

$$S(r,\theta)=\left(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \sqrt{1-r^2}\right),\quad 0\leq r\leq \mathrm{sen}\,\theta,\ \ 0\leq\theta\leq\pi.$$

Para aplicarlo, calculamos el rotacional del campo vectorial

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ x & yz^2 & xz \end{vmatrix} = (-2yz, -z, 0)\,,$$

por lo que $\operatorname{rot} F\,(S\,(r,\theta)) = \left(-2r \operatorname{sen}\theta\sqrt{1-r^2}, -\sqrt{1-r^2}, 0\right)$. A continuación, calculamos el producto vectorial fundamental

$$S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \dfrac{-r}{\sqrt{1-r^2}} \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{r^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-r^2}}, r\right),$$

por lo que la orientación de la superficie S es compatible con la orientación de su frontera C. Obtenemos el producto escalar

$$\operatorname{rot} F\,(S\,(r,\theta)) \cdot (S_r \times S_\theta) = -2r^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - r^2\operatorname{sen}\theta,$$

para calcular la integral de superficie

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \operatorname{rot} F \cdot n\, dS &= \int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \left(-2r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta - r^2\operatorname{sen}\theta\right)\, dr\, d\theta \\
&= -\int_0^\pi \left[\frac{r^4}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\operatorname{sen}\theta} d\theta \\
&= -\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^5\theta\cos\theta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^4\theta\right) d\theta \\
&= -\left[\frac{\operatorname{sen}^6\theta}{12}\right]_0^\pi - \frac{1}{3}\int_0^\pi \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^\pi \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta.
\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4\theta &= \left(\operatorname{sen}^2\theta\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2}\right),
\end{aligned}$$

podemos calcular

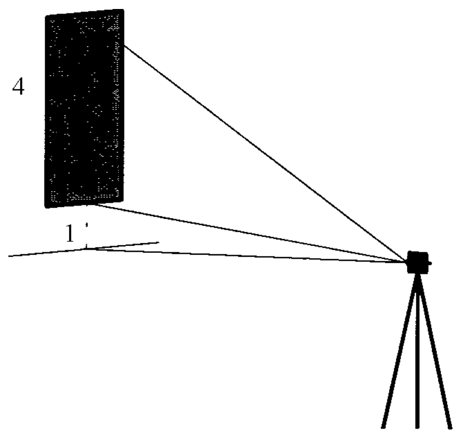
$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \operatorname{rot} F \cdot n\, dS &= -\frac{1}{3}\int_0^\pi \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2}\right) d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\left[\frac{3\theta}{8} - \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{8}\right]_0^\pi \\
&= -\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 27 de Enero de 2004

Ejercicio 1. Se desea fotografiar un cuadro de 4 m. de altura colgado en una pared de una galería de arte. La lente de la cámara está situada 1 m. por debajo del extremo inferior del cuadro. ¿A qué distancia de la pared ha de colocarse la cámara para que el ángulo que subtiende (o abarca) el cuadro sea máximo?



Solución: Sea x la distancia entre la pared y la lente de la cámara. Consideramos el ángulo α que subtiende el cuadro, y el ángulo β que subtiende el metro de pared situada por debajo del extremo inferior del cuadro. Entonces,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{5}{x}, \quad \tan(\beta) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0,\infty).$$

Aplicando la función inversa obtenemos la función objetivo

$$\alpha(x) = \arctan\frac{5}{x} - \arctan\frac{1}{x}, \quad x \in (0,\infty).$$

Para obtener los puntos críticos, resolvemos la ecuación

$$\alpha'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{5}{x}\right)^2}\left(\frac{-5}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-5}{x^2+25} + \frac{1}{x^2+1}$$
$$= \frac{-5x^2-5+x^2+25}{(x^2+25)(x^2+1)} = \frac{20-4x^2}{(x^2+25)(x^2+1)} = 0.$$

Dado que $x \in (0, \infty)$, la única solución de esta ecuación es el punto crítico
$$4x^2 = 20 \Longleftrightarrow x = \sqrt{5}.$$

Observemos que si $x \in \left(0, \sqrt{5}\right)$ entonces $20 - 4x^2 > 0$ y $\alpha'(x) > 0$. Además, si $x \in \left(\sqrt{5}, \infty\right)$ entonces $20 - 4x^2 < 0$ y $\alpha'(x) < 0$. En consecuencia, el ángulo máximo que subtiende el cuadro se obtiene colocando la cámara a una distancia de $\sqrt{5}$ metros.

Ejercicio 2. Calcular los volúmenes de los sólidos que se obtienen al hacer girar la región limitada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$, en torno al eje x, al eje y, y a la recta $y = 2$.

Solución: Las curvas se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$, por lo que la región limitada por dichas curvas es

$$R = \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \;\; x^2 \leq y \leq x\right\}.$$

El volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje x, usando el método de las arandelas, es

$$V_1(R) = \pi \int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) \, dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}.$$

El volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje y, usando el método de las capas, es

$$\begin{aligned} V_2(R) &= 2\pi \int_0^1 x\left(x - x^2\right) \, dx = 2\pi \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) \, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

El volumen del sólido generado al girar R alrededor de la recta $y = 2$, usando el método de las arandelas, es

$$\begin{aligned} V_3(R) &= \pi \int_0^1 \left[(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2\right] \, dx \\ &= \pi \int_0^1 \left[(4 + x^4 - 4x^2) - \left(4 + x^2 - 4x\right)\right] \, dx \\ &= \pi \int_0^1 \left[(x^4 - 5x^2 + 4x\right] \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 2x^2\right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 2\right) = \pi \left(\frac{3 - 25 + 30}{15}\right) = \frac{8\pi}{15}. \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Definir el polinomio de Taylor y el resto de Lagrange de grado n de una función f en un punto a. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función continua definida por

$$f(x)=\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3},\quad x\neq 0.$$

(a) Calcular $f(0)$.

(b) Obtener el polinomio de Maclaurin de f de grado 4.

(c) Aproximar $f(1)$ utilizando el polinomio obtenido en el apartado anterior y estimar el error cometido.

Solución: (a) Usando el desarrollo en serie de Maclaurin de la función

$$\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

deducimos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{\frac{x^3}{3!}}=1.$$

La función f es continua en $x=0$, por lo que

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

(b) El polinomio de Maclaurin de la función f de grado 4 es

$$P_4(x)=\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\right)}{x^3}=\frac{1}{6}-\frac{x^2}{5!}+\frac{x^4}{7!}.$$

(c) La aproximación pedida es

$$f(1)\approx P_4(1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}=0.15853175.$$

Para estimar el error cometido, observamos que

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{\operatorname{sen}z}{8!}x^8\right)}{x^3}\\&=P_4(x)-\frac{\operatorname{sen}z}{8!}x^5=P_4(x)+R_4(x),\end{aligned}$$

donde z está comprendido entre 0 y x. Para el valor $x = 1$, obtenemos la estimación del error

$$|R_4(1)| = \frac{|\operatorname{sen} z|}{8!} \leq \frac{1}{8!} = 2.480 \times 10^{-5}.$$

La evaluación numérica de la función en $x = 1$ es

$$f(1) = 1 - \sin 1 = 0.15852902.$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 13 de Junio de 2005

Ejercicio 1. Demostrar que la curvatura K de la curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$ es

$$K = \frac{\left|2(r')^2 - r\,r'' + r^2\right|}{\left[(r')^2 + r^2\right]^{3/2}}.$$

Calcular la curvatura de la curva $r = a \operatorname{sen} \theta$.

Solución: Las ecuaciones paramétricas de la curva en $\mathbb{R}^3$ son

$$R(\theta) = (x(\theta), y(\theta), 0) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\operatorname{sen}\theta, 0).$$

La curvatura de $R(\theta)$ es

$$K = \frac{\left\|R'(\theta) \times R''(\theta)\right\|}{\|R'(\theta)\|^3}.$$

Dado que el producto vectorial

$$R'(\theta) \times R''(\theta) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'(\theta) & y'(\theta) & 0 \\ x''(\theta) & y''(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \big(0, 0, x'(\theta)\, y''(\theta) - x''(\theta)\, y'(\theta)\big),$$

obtenemos la siguiente fórmula para calcular la curvatura

$$K = \frac{|x'(\theta)\, y''(\theta) - x''(\theta)\, y'(\theta)|}{\left[(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2\right]^{3/2}}.$$

A continuación, calculamos

$$x'(\theta) = r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta, \qquad y'(\theta) = r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta,$$
$$x''(\theta) = r''\cos\theta - 2r'\operatorname{sen}\theta - r\cos\theta, \quad y''(\theta) = r''\operatorname{sen}\theta + 2r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta.$$

Entonces, las igualdades

$$\left|x'(\theta)\, y''(\theta) - x''(\theta)\, y'(\theta)\right| = \left|2(r')^2 - r\,r'' + r^2\right|,$$
$$\big(x'(\theta)\big)^2 + \big(y'(\theta)\big)^2 = (r')^2 + r^2,$$

implican la fórmula pedida. Para calcular la curvatura de la curva $r = a\operatorname{sen}\theta$, observemos que $r' = a\cos\theta$ y $r'' = -a\operatorname{sen}\theta$. Entonces,

$$\left|2(r')^2 - r\,r'' + r^2\right| = \left|2a^2\cos^2\theta + 2a^2\operatorname{sen}^2\theta\right| = 2a^2,$$
$$\left[(r')^2 + r^2\right]^{3/2} = \left[a^2\right]^{3/2} = a^3,$$
$$K = \frac{2a^2}{a^3} = \frac{2}{a}.$$

Ejercicio 2. Hallar los puntos de la elipse

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 - 4 &= 0, \\ x + y + z &= 0, \end{aligned}$$

más cercanos y más lejanos al eje OY.

Solución: La distancia de un punto cualquiera $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ al eje OY es $\sqrt{x^2 + z^2}$. Entonces, para encontrar los puntos de la elipse más cercanos y más lejanos al eje OY, usamos la función objetivo $f(x, y, z) = x^2 + z^2$. Aplicando el teorema de los multiplicadores de Lagrange, con las dos restricciones que definen la elipse, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x &= 4\lambda x + \mu, \\ 0 &= 2\lambda y + \mu, \\ 2z &= \mu, \\ 2x^2 + y^2 &= 4, \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo la tercera ecuación en la primera y segunda, y simplificando, el sistema es

$$\begin{aligned} x &= 2\lambda x + z, \\ 0 &= \lambda y + z, \\ 2x^2 + y^2 &= 4, \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Si $y = 0$, la segunda ecuación implica que $z = 0$, y usando la cuarta concluimos que $x = 0$, lo que contradice la tercera ecuación. Entonces $y \neq 0$, por lo que $\lambda = -z/y$, siendo $x = -2xz/y + z$, lo que implica $xy = -2xz + yz$. Dado que $z = -x - y$, obtenemos

$$xy = 2x(x + y) - y(x + y) = 2x^2 + xy - y^2 \Longleftrightarrow 2x^2 - y^2 = 0.$$

Las ecuaciones $2x^2 + y^2 = 4$, $2x^2 - y^2 = 0$, implican que $x^2 = 1$, $y^2 = 2$. Teniendo en cuenta que $z = -x - y$, los cuatro puntos solución del sistema son

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(1, \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\right), \quad P_2 = \left(1, -\sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\right), \\ P_3 &= \left(-1, \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\right), \quad P_4 = \left(-1, -\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Los valores de la función objetivo $f(x, y, z) = x^2 + z^2$ en dichos puntos son

$$f(P_1) = f(P_4) = 4 + 2\sqrt{2}, \quad f(P_2) = f(P_3) = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Entonces, los puntos más cercanos son P_2 y P_3, mientras que los más lejanos son P_1 y P_4.

Ejercicio 3. Consideremos la superficie S definida por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0,$$

orientada según la normal exterior a la esfera y el campo vectorial

$$F(x, y, z) = \left(-y, yz^2, x^2 z\right).$$

Calcular la integral de superficie

$$\iint\limits_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS,$$

directamente, aplicando el teorema de Stokes y usando el teorema de Gauss.

Solución: En primer lugar, calculamos el rotacional del campo vectorial

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ -y & yz^2 & x^2 z \end{vmatrix} = (-2yz, -2xz, 1).$$

Dado que $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, parametrizamos la superficie S mediante

$$S(x, y) = \left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right), \quad (x, y) \in D,$$

donde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$. El producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1\right),$$

y tiene la orientación exterior a la esfera porque $S_x \times S_y (0, 0) = (0, 0, 1)$. Calculamos directamente

$$\begin{aligned} \iint\limits_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS &= \iint\limits_D \operatorname{rot} F (S(x, y)) \cdot S_x \times S_y \, dx \, dy = \iint\limits_D (1 - 4xy) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(1 - 4r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta\right) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - r^4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta\right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - 8 \operatorname{sen} 2\theta) \, d\theta = [2\theta + 4 \cos 2\theta]_0^{2\pi} = 4\pi, \end{aligned}$$

usando el cambio de variables a coordenadas polares.

El teorema de Stokes asegura que

$$\iint\limits_S \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = \oint\limits_C F \cdot dr,$$

donde la curva C, que es la frontera de S, viene dada por $x^2 + y^2 = 4, \;\; z = 0$. Una parametrización de la curva con orientación inducida por la superficie orientada por la normal exterior a la esfera es

$$r(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 0)\,, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Calculamos

$$\oint\limits_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)\; dt = \int_0^{2\pi} (-2\operatorname{sen} t, 0, 0) \cdot (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)\; dt$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt = 4\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = 2\left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Para usar el teorema de Gauss, consideramos la superficie S^* definida por $x^2 + y^2 \le 4, \;\; z = 0$. Entonces, la superficie $S \cup S^*$ es la frontera de la semiesfera V, donde la orientación de S^* viene dada por la normal exterior a la semiesfera. El teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint\limits_{S\cup S^*} \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}(\operatorname{rot} F)\; dx\, dy\, dz = 0,$$

porque $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)(x, y, z) = 0$. En consecuencia,

$$\iint\limits_S \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = -\iint\limits_{S^*} \operatorname{rot} F \cdot N\, dS.$$

Parametrizamos la superficie S^* mediante

$$S^*(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 0)\,, \quad 0 \le r \le 2, \;\; 0 \le \theta \le 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental

$$S_r^* \times S_\theta^* = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r)\,,$$

está orientado hacia el interior de V, por lo que debemos integrar

$$-\operatorname{rot} F\,(S^*(r, \theta)) \cdot S_r^* \times S_\theta^* = -\,(0, 0, 1) \cdot (0, 0, r) = -r.$$

El flujo exterior, a través de S^*, del rotacional del campo F es

$$\iint\limits_{S^*} \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^2 -r\, dr\, d\theta = -2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = -4\pi,$$

lo que implica el resultado pedido.

CÁLCULO

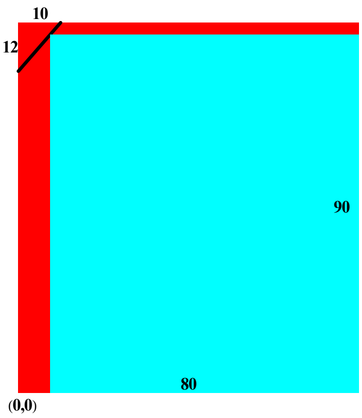
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen, 7 de Septiembre de 2005

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Un espejo plano de dimensiones 80 cm y 90 cm, se rompe por una esquina según una recta. De los dos trozos que quedan, el menor es un triángulo de catetos 10 cm y 12 cm, correspondientes a las dimensiones menor y mayor del espejo respectivamente. Hallar el área máxima del espejo rectangular que se puede obtener con el trozo mayor.

Solución.



Situando el origen de las coordenadas en el vértice del rectángulo que muestra la figura, la recta de rotura pasa por los puntos $(0, 78)$ y $(10, 90)$. Entonces, la ecuación de dicha recta es

$$y - 78 = \frac{12}{10}x.$$

El área del espejo rectangular que se puede obtener con el trozo mayor en un punto (x, y) de la recta es

$$\begin{aligned} A(x) &= (80 - x)\, y = (80 - x)\left(\frac{6}{5}x + 78\right) \\ &= 96x + 6240 - \frac{6}{5}x^2 - 78x = -\frac{6}{5}x^2 + 18x + 6240, \end{aligned}$$

donde $x \in [0, 10]$. El único punto crítico es la solución de la ecuación

$$A'(x) = -\frac{12}{5}x + 18 = 0 \Longrightarrow x = \frac{18 \times 5}{12} = \frac{15}{2} \in [0, 10].$$

Como $A''(x) = -12/5 < 0$ y la función A es un polinomio de segundo grado, el máximo absoluto se alcanza en $x = 15/2$ y su valor es $A(15/2) = 6307.5$

Ejercicio 2. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$.

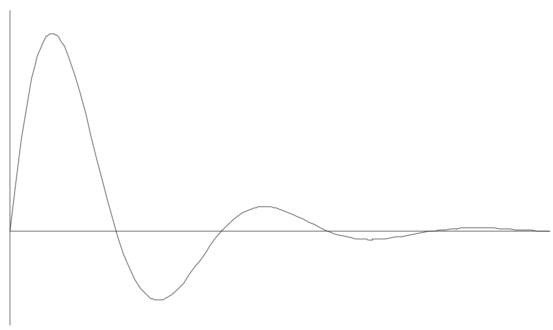
(a) Dibujar un esquema de la gráfica de f y obtener la sucesión $(x_k)_{k \geq 0}$ de ceros de f en $[0, \infty)$.

(b) Calcular el área A_k de la región comprendida entre la gráfica de f en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ y el eje x.

(c) Probar que la sucesión $(A_k)_{k \geq 0}$ es una progresión geométrica cuya razón es menor que 1.

(d) Hallar la suma de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$.

Solución.
(a)



Dado que $e^{-x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, los ceros de f se obtienen resolviendo $\operatorname{sen} x = 0$ en $[0, \infty)$. Las soluciones son $x_k = k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

(b) Usando integración por partes con $u = e^{-x}$ y $dv = \operatorname{sen} x \, dx$, tenemos $du = -e^{-x} \, dx$ y $v = -\cos x$. Entonces

$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx.$$

Aplicando el mismo método a la primitiva del término derecho, con $u = e^{-x}$ y $dv = \cos x \, dx$, siendo $du = -e^{-x} \, dx$ y $v = \operatorname{sen} x$, obtenemos

$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{-x} \cos x - \left(e^{-x} \operatorname{sen} x + \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx \right).$$

Por tanto

$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \operatorname{sen} x).$$

Para calcular el área A_k de la región comprendida entre la gráfica de f en el intervalo $[k\pi, (k+1)\pi]$ y el eje x, observamos que la integral es positiva si

$k = 0$ o bien par y negativa si k es impar. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
A_k &= (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \frac{(-1)^k}{2} \left[e^{-k\pi} \left(\cos k\pi + \operatorname{sen} k\pi \right) - e^{-(k+1)\pi} \left(\cos\left(k+1\right)\pi + \operatorname{sen}\left(k+1\right)\pi \right) \right] \\
&= \frac{(-1)^k}{2} \left[e^{-k\pi} \, (-1)^k - e^{-(k+1)\pi} \, (-1)^{k+1} \right] \\
&= \frac{e^{-k\pi}}{2} \left(1 + e^{-\pi} \right).
\end{aligned}$$

(c) Para probar que la sucesión $(A_k)_{k \geq 0}$ es una progresión geométrica, calculamos

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = e^{-\pi} = \frac{1}{e^{\pi}} < 1.$$

(d) La suma de la serie geométrica viene dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-k\pi}}{2} \left(1 + e^{-\pi} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \right).$$

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen, 7 de Septiembre de 2005
SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Calcular las distancias mínima y máxima del plano

$$x + y + 2z = 0$$

a los puntos de la elipse

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Solución. La distancia de un punto $P = (x, y, z)$ al plano viene dada por

$$d(x, y, z) = \frac{|x + y + 2z|}{\sqrt{6}}.$$

Entonces la función que vamos a optimizar es $f(x, y, z) = (x + y + 2z)^2$, sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= 3x^2 + y^2 - 12 = 0, \\ h(x, y, z) &= x + y + z - 2 = 0. \end{aligned}$$

Aplicando el criterio de los multiplicadores de Lagrange, calculamos los puntos solución del sistema $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$, resolviendo

$$\begin{aligned} 2(x + y + 2z) &= 6\lambda x + \mu, \\ 2(x + y + 2z) &= 2\lambda y + \mu, \\ 4(x + y + 2z) &= \mu. \end{aligned}$$

Usando la tercera ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} -2(x + y + 2z) &= 6\lambda x, \\ -2(x + y + 2z) &= 2\lambda y, \end{aligned}$$

lo que implica que $6\lambda x = 2\lambda y$.

Si $\lambda = 0$ entonces $x + y + 2z = 0$, luego $x + y = -2z$. Usando la restricción $x + y + z = 2$, obtenemos $z = -2$, por lo que $x + y = 4$. Dado que $y = 4 - x$, la primera restricción implica

$$12 = 3x^2 + (4 - x)^2 = 3x^2 + 16 + x^2 - 8x \Longleftrightarrow 0 = 4x^2 - 8x + 4.$$

La única solución de $0 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ es $x = 1$. Así obtenemos el punto $P_1 = (1, 3, -2)$.

Si $\lambda \neq 0$ entonces $3x = y$, luego la primera restricción implica

$$12 = 3x^2 + 9x^2 = 12x^2 \Longleftrightarrow x = \pm 1.$$

La solución $x = 1, \quad y = 3$ con la restricción $x + y + z = 2$, proporciona el punto P_1 obtenido. Si $x = -1, \quad y = -3$, tenemos que $z = 2 - x - y = 6$, por lo que $P_2 = (-1, -3, 6)$ es la segunda solución del sistema. Las distancias de los puntos P_1 y P_2 al plano vienen dadas por

$$d\,(P_1) = \frac{|1 + 3 - 4|}{\sqrt{6}} = 0, \quad d\,(P_2) = \frac{|-1 - 3 + 12|}{\sqrt{6}} = \frac{8}{\sqrt{6}}.$$

Entonces, la distancia mínima se alcanza en P_1 que pertenece al plano y la distancia máxima se alcanza en P_2.

Ejercicio 4. Hallar el volumen del sólido situado en el exterior del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que lo limita, en el semiplano $z \geq 0$ y en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

Solución. El sólido Ω viene dado por

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2x, \ \ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\right\}.$$

Entonces, el volumen de Ω es

$$V = \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz = \iint_{D} \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dx\, dy = \iint_{D} \left(x^2 + y^2\right) \, dx\, dy,$$

donde la proyección sobre el plano xy es $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\right\}$. Usando coordenadas polares, la ecuación del cilindro es $r^2 = 2r\cos\theta \Leftrightarrow r = 2\cos\theta$, donde $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Para calcular la integral doble, usamos la fórmula del cambio a coordenadas polares

$$\begin{aligned}
V &= \iint_{D} \left(x^2 + y^2\right) \, dx\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 r \, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta \\
&= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \left[\frac{3}{2}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{8} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen Final. 7 de Julio de 2006
PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Determinar el máximo absoluto de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Solución. En primer lugar, observemos que la función f satisface

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{3-x} & \text{si } x \leq 0, \\[2ex] \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{3-x} & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\[2ex] \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{x-1} & \text{si } 2 \leq x. \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, la derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(3-x)^2} > 0,$$

luego f es creciente en $(-\infty, 0]$, lo que implica $f(x) \leq f(0) = 4/3$ para todo $x \in (-\infty, 0]$. En el intervalo $(0, 2)$, la derivada es

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(3-x)^2} \\ &= \frac{-\left(x^2-6x+9\right) + x^2 + 2x + 1}{(1+x)^2(3-x)^2} \\ &= \frac{8x-8}{(1+x)^2(3-x)^2}, \end{aligned}$$

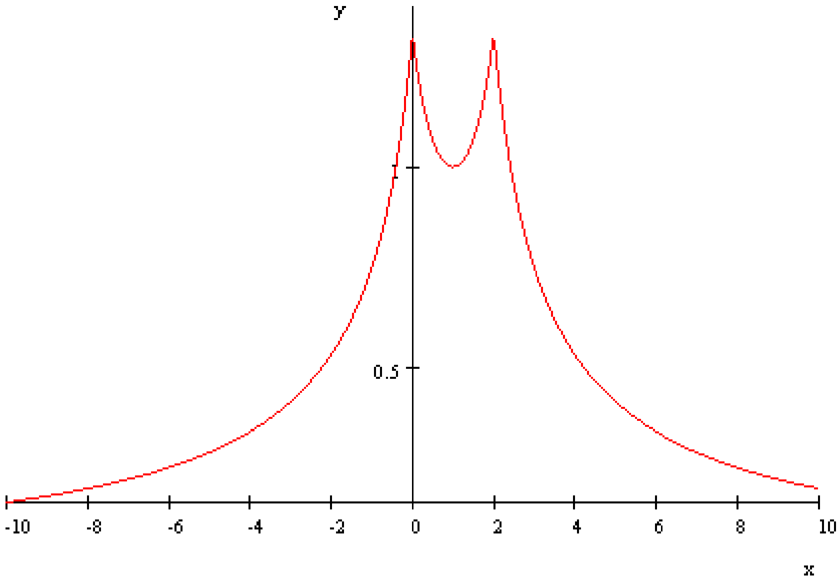
lo que implica que f es decreciente en $[0, 1]$ y creciente en $[1, 2]$. Entonces

$$f(x) \leq \max\{f(0), f(2)\} = \frac{4}{3} \text{ para todo } x \in [0, 2].$$

Finalmente, en el intervalo $(2, \infty)$, la derivada es

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0,$$

luego f es decreciente en $[2, \infty)$ y $f(x) \leq f(2) = 4/3$ para todo $x \in [2, \infty)$. En consecuencia, el máximo absoluto de f en $\mathbb{R}$ es $f(0) = f(2) = 4/3$.



Gráfica de la función f

Ejercicio 2.

(a) Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx.$$

(b) Calcular el valor de la integral impropia I usando la sustitución $u = 1/x$.

Solución.
(a) En primer lugar, analizamos la convergencia de la integral impropia

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx.$$

Para aplicar el criterio de comparación por paso al límite, calculamos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\ln x}{1+x^2}}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0,$$

si $\alpha < 0$. Dado que la integral $\int_0^1 x^\alpha\, dx$ converge si y sólo si $\alpha > -1$, usando $\alpha \in (-1, 0)$, obtenemos que la integral I_1 es convergente. Para estudiar la convergencia de la integral impropia

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx,$$

calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\ln x}{1+x^2}}{x^\alpha} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha + x^{\alpha+2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1} + (\alpha+2)\, x^{\alpha+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha} + (\alpha+2)\, x^{\alpha+2}} = 0,
\end{aligned}$$

si $\alpha + 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -2$. Dado que la integral $\int_1^\infty x^\alpha\, dx$ converge si y sólo si $\alpha < -1$, usando $\alpha \in (-2, -1)$, obtenemos que la integral I_2 es convergente. Como ambas integrales son convergentes, concluimos que la integral I es convergente.
(b) La sustitución $u = 1/x$ implica $x = 1/u$, $\ln x = -\ln u$, $dx = -u^{-2}\, du$, por lo que

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx = -\int_0^\infty \frac{-\ln u}{1+(1/u)^2} \frac{du}{(-u^2)} = -\int_0^\infty \frac{\ln u}{1+u^2}\, du = -I.$$

Entonces $2I = 0$,luego el valor de la integral impropia $I = 0$.

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen Final. 7 de Julio de 2006
SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Sea R la región acotada por las curvas

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{2x}, \quad y = \frac{x^2}{3}, \quad y = \frac{x^2}{4}.$$

Utilizar el cambio de variables $x = u^{1/3}v^{2/3}$, $y = u^{2/3}v^{1/3}$ para hallar el área de la región R.

Solución. La región R es

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{3y} \le x \le \sqrt{4y}, \ \ \sqrt{x} \le y \le \sqrt{2x}\right\}.$$

El cambio de variables dado implica

$$\frac{x^2}{y} = \frac{u^{2/3}v^{4/3}}{u^{2/3}v^{1/3}} = v, \quad \frac{y^2}{x} = \frac{u^{4/3}v^{2/3}}{u^{1/3}v^{2/3}} = u.$$

Además, observemos que

$$\sqrt{3y} \le x \le \sqrt{4y} \Longleftrightarrow 3 \le \frac{x^2}{y} \le 4,$$
$$\sqrt{x} \le y \le \sqrt{2x} \Longleftrightarrow 1 \le \frac{y^2}{x} \le 2.$$

Entonces la región S en el plano uv es

$$S = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le u \le 2, \ \ 3 \le v \le 4\right\}.$$

A continuación, calculamos el jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Usando el teorema del cambio de variables, calculamos el área de la región R,

$$a(R) = \iint_R dx\, dy = \iint_S \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv = \int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{3}\, du\, dv = \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 4. Calcular el flujo exterior del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z),$$

sobre la superficie dada por los puntos del paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ tales que $z \geq 1$.

Solución. La superficie dada es

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2, \ \ x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

Si consideramos el sólido Q cuyas fronteras son S y la superficie T, definida por $x^2+y^2 \leq 1$, $z = 1$, el teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint\limits_{S\cup T} F \cdot N \, dS = \iiint\limits_{Q} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz.$$

Calculamos

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} - \left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)}{(x^2+y^2+z^2)^3} = 0$$

En consecuencia,

$$\iint\limits_{S} F \cdot N \, dS = -\iint\limits_{T} F \cdot N \, dS.$$

Parametrizamos la superficie T mediante

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 1), \ \ 0 \leq r \leq 1, \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,r),$$

está orientado hacia el interior de Q, por lo que debemos integrar

$$\begin{aligned} -\operatorname{rot} F(T(r,\theta)) \cdot T_r \times T_\theta &= -\frac{1}{(r^2+1)^{3/2}}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 1) \cdot (0,0,r) \\ &= \frac{-r}{(r^2+1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Entonces, el flujo exterior del campo F sobre la superficie S es

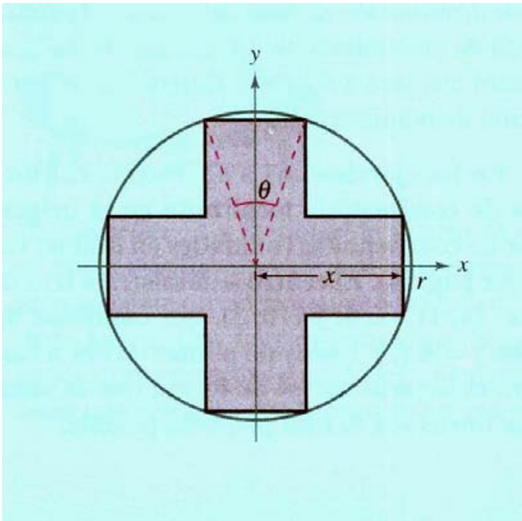
$$\begin{aligned} \iint\limits_{S} F \cdot N \, dS &= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{-r}{(r^2+1)^{3/2}} \, d\theta \, dr = 2\pi\left[\frac{-1}{(r^2+1)^{1/2}}\right]_0^1 \\ &= 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi\left(2 - \sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 19 de Enero de 2006

Ejercicio 1. Determinar el área máxima de una cruz simétrica inscrita en un círculo de radio r (ver la figura).



Solución: Elegimos como variable el ángulo $\theta \in (0, \pi/2)$ y obtenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a/2}{r} \Longrightarrow a = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$
$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{r} \Longrightarrow b = r\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Entonces, el área de la cruz simétrica es la suma de las áreas de dos rectángulos de dimensiones a y $2b$, menos el área de un cuadrado de lado a. Es decir, la función objetivo es

$$\begin{aligned} A(\theta) &= 4ab - a^2 = 8r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4r^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4r^2\left(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 4r^2\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{1-\cos\theta}{2}\right) \\ &= 2r^2\left(2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1\right), \end{aligned}$$

donde $\theta \in (0, \pi/2)$. Para obtener los puntos críticos, resolvemos la ecuación

$$A'(\theta) = 2r^2\left(2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right) = 0.$$

Dado que $r > 0$ y $\theta \in (0, \pi/2)$, la única solución de esta ecuación es el punto crítico θ^* tal que

$$\operatorname{sen}\theta^* = 2\cos\theta^* \Longleftrightarrow \theta^* = \arctan 2.$$

Si $\theta \in (0, \arctan 2)$ entonces $0 < \tan\theta < 2$, luego $\operatorname{sen}\theta < 2\cos\theta$, lo que implica $A'(\theta) > 0$. Además, si $\theta \in (\arctan 2, \pi/2)$ entonces $A'(\theta) < 0$. Entonces, el área máxima se obtiene en el ángulo $\theta^* = \arctan 2$. Para calcular dicha área, observamos que

$$\operatorname{sen}\theta^* = 2\cos\theta^* \Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta^* = 4\left(1 - \operatorname{sen}^2\theta^*\right) \Longrightarrow 5\operatorname{sen}^2\theta^* = 4 \Longrightarrow \operatorname{sen}\theta^* = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

porque $\theta^* \in (0, \pi/2)$. En consecuencia, $\cos\theta^* = 1/\sqrt{5}$ y el área máxima es

$$A(\theta^*) = 2r^2\left(\frac{5}{\sqrt{5}} - 1\right) = 2r^2\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Ejercicio 2. Una esfera de radio r se corta por un plano formando un casquete esférico de altura h. Calcular el volumen y la superficie (incluyendo la base) de este sólido de revolución.

Solución: El casquete esférico de altura h se obtiene girando alrededor del eje y la región acotada por las gráficas de

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x = 0, \quad y = r - h, \;\; 0 \leq h \leq 2r.$$

El volumen, usando el método de los discos, es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{r-h}^{r} [x\,(y)]^2 \; dy = \pi \int_{r-h}^{r} \left(r^2 - y^2\right) \, dy = \pi \left[r^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{r-h}^{r} \\ &= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2\,(r-h) + \frac{(r-h)^3}{3}\right) \\ &= \pi \left(\frac{2r^3}{3} - r^3 + r^2 h + \frac{r^3}{3} - r^2 h + r h^2 - \frac{h^3}{3}\right) \\ &= \pi \left(r h^2 - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi h^2\,(3r - h)\,. \end{aligned}$$

Calculamos la superficie $S = S_1 + S_2$, donde S_1 es el área de la pared esférica y S_2 es el área de la base contenida en el plano de corte. La primera superficie verifica que

$$S_1 = 2\pi \int_{r-h}^{r} x\sqrt{1 + (x')^2}\, dy.$$

Sabemos que $x = \sqrt{r^2 - y^2}$. Derivando la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ respecto a y, obtenemos $2xx' + 2y = 0$, luego $x' = -\, y/\, x$. Entonces,

$$1 + \left(x'\right)^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{r^2}{r^2 - y^2}.$$

Por tanto,

$$S_1 = 2\pi \int_{r-h}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}\, dy = 2\pi r \int_{r-h}^{r} dy = 2\pi r h.$$

La base del sólido es un círculo cuyo radio es la coordenada $x > 0$ de la intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con la recta $y = r - h$, luego $x^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2$. Entonces, $S_2 = \pi\left(2rh - h^2\right)$ y el área total es

$$S = 4\pi r h - \pi h^2 = \pi h\,(4r - h)\,.$$

Ejercicio 3.

(a) Supongamos que las series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ son convergentes. Estudiar el carácter de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n},$$

razonando las respuestas.

(b) Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)},$$

calcular su radio de convergencia, el carácter de la serie en los extremos del intervalo de convergencia y su suma.

Solución: (a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente porque es la diferencia de dos series convergentes. Para cada entero $n \geq 1$, tenemos que

$$\frac{a_n^2}{1+a_n} < a_n,$$

porque $a_n > 0$, luego usando el criterio de comparación, deducimos que la segunda serie también es convergente. Para analizar el carácter de la tercera serie, usaremos la condición necesaria de convergencia de una serie. Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = 1,$$

porque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. En consecuencia, la tercera serie es divergente.

(b) El radio de convergencia de la serie de potencias es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{(n+2)(n+3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)}{(n+1)} = 1,$$

por lo que la serie es absolutamente convergente en el intervalo $(-1, 1)$. En el extremo $x = -1$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$$

es alternada y la sucesión $\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)_{n\geq 1}$ es decreciente con límite cero, por lo que el criterio de Leibniz asegura la convergencia. En el extremo $x = 1$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

tiene el mismo carácter que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, por lo que también es convergente. Por tanto, el dominio de convergencia es $[-1,1]$.

Para calcular la suma de la serie de potencias, sabemos que la suma de la serie geométrica es

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \quad -1 < t < 1.$$

Si $x \in (-1,1)$, integrando en el intervalo $[0,x]$, obtenemos

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x t^n\, dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = -\ln(1-x).$$

En consecuencia, para todo $x \in (-1,1)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x).$$

Si $x \in (-1,1)$, integrando en el intervalo $[0,x]$, obtenemos

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = -\int_0^x \ln(1-t)\, dt.$$

A continuación y usando integración por partes, calculamos

$$\begin{aligned}
-\int_0^x \ln(1-t)\, dt &= -\left[t\ln(1-t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1-t}\, dt \\
&= -x\ln(1-x) - \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - 1\right) dt \\
&= -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x \\
&= x + (1-x)\ln(1-x).
\end{aligned}$$

Así, para todo $x \in (-1,1)$, queda demostrado que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = x + (1-x)\ln(1-x).$$

Si $x \neq 0$, dividimos por x^2 y la suma de la serie de potencias es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{x} + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x^2}.$$

En el caso $x = 0$, se obtiene directamente que la suma es $1/2$.

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Segundo Examen Parcial. 22 de Junio de 2006

Ejercicio 1.
Hallar los extremos absolutos de $f(x, y, z) = x - y - z$, sobre el conjunto

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 - 1 = 0, \;\; 3x - 4z = 0\right\}.$$

Solución: Aplicamos el criterio de los multiplicadores de Lagrange a la función $f(x, y, z) = x - y - z$, resolviendo el sistema dado por $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$ y las restricciones

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x^2 + 2y^2 - 1 = 0, \\ h(x, y, z) &= 3x - 4z = 0. \end{aligned}$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x + 3\mu, \\ -1 &= 4\lambda y, \\ -1 &= -4\mu. \end{aligned}$$

La tercera ecuación implica $\mu = 1/4$, por lo que las dos primeras son

$$1/4 = 2\lambda x, \quad 1/4 = -\lambda y,$$

luego $2\lambda x = -\lambda y$. Dado que $\lambda \neq 0$, obtenemos $2x = -y$. Sustituyendo en la primera restricción

$$x^2 + 8x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3} \Rightarrow y = \mp\frac{2}{3}.$$

La segunda restricción, $z = \dfrac{3x}{4}$ nos proporciona los extremos absolutos

$$A = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right), \quad B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right).$$

Dado que

$$f(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad f(B) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4},$$

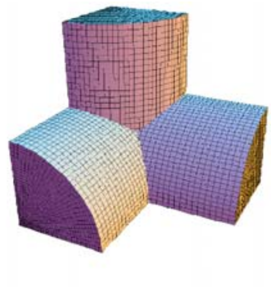
la función tiene un máximo absoluto en A y un mínimo absoluto en B.

Ejercicio 2.

(a) Evaluar las integrales $\displaystyle\iint_{D_1} \sqrt{1-x^2}\, dx\, dy$, $\displaystyle\iint_{D_2} \sqrt{1-y^2}\, dx\, dy$, donde

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\},\\
D_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\right\}.
\end{aligned}
$$

(b) Calcular el volumen del sólido dado por la intersección de los tres cilindros sólidos $x^2+y^2 \leq 1$, $x^2+z^2 \leq 1$, $y^2+z^2 \leq 1$, situado en el octante positivo $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. *Indicación: aplicar los resultados obtenidos en (a).*



Solución: (a) Usando coordenadas polares, calculamos la integral

$$
\begin{aligned}
\iint_{D_1} \sqrt{1-x^2}\, dx\, dy &= \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \sqrt{1-r^2\cos^2\theta}\, r\, dr\, d\theta\\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2\cos^2\theta}\right)\left[\left(1-r^2\cos^2\theta\right)^{3/2}\right]_0^1 d\theta\\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{\left(1-\cos^2\theta\right)^{3/2}-1}{\cos^2\theta}\, d\theta\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{1-\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{1-\operatorname{sen}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)}{\cos^2\theta}\, d\theta\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} + \operatorname{sen}\theta\right) d\theta\\
&= \frac{1}{3}\left[\operatorname{tg}\theta - \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right]_0^{\pi/4}\\
&= \frac{1}{3}\left(1-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right) = \frac{1}{3}\left(3-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= 1-\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
\iint_{D_2} \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy &= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^1 \sqrt{1-r^2\operatorname{sen}^2\theta}\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2\operatorname{sen}^2\theta}\right)\left[\left(1-r^2\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}\right]_0^1 d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}-1}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\cos^3\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\cos\theta\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}+\cos\theta\right) d\theta \\
&= \frac{1}{3}\left[-\operatorname{cotg}\theta+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}+\operatorname{sen}\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{3}\left(2+1-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(3-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 1-\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

(b) Los puntos del sólido U satisfacen $x^2+y^2\le 1$, $z^2\le 1-x^2$, $z^2\le 1-y^2$, en el octante positivo y su descripción como sólido XY-proyectable es

$$
U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+ : x^2+y^2\le 1,\ \ 0\le z\le \min\left\{\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-y^2}\right\}\right\}.
$$

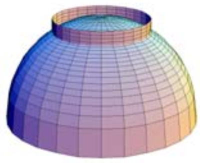
Considerando los dominios D_1 y D_2 del apartado (a), observemos que

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in D_1 &\Rightarrow 0\le y\le x \Rightarrow y^2\le x^2 \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\le\sqrt{1-y^2} \Rightarrow z\le\sqrt{1-x^2}, \\
(x,y)\in D_2 &\Rightarrow 0\le x\le y \Rightarrow x^2\le y^2 \Rightarrow \sqrt{1-y^2}\le\sqrt{1-x^2} \Rightarrow z\le\sqrt{1-y^2}.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, el volumen del sólido U es

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_U dx\,dy\,dz = \iint_{D_1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz\,dx\,dy + \iint_{D_2}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\,dx\,dy \\
&= \iint_{D_1}\sqrt{1-x^2}\,dx\,dy + \iint_{D_2}\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy = 2-\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3.
Sea S la porción de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=4,\ z\geq 0$, que se encuentra en el interior del cilindro $x^2+y^2=1$. Dado el campo vectorial $F(x,y,z)=(xy,yz,zx)$, calcular el flujo exterior del campo $\operatorname{rot}(F)$ a través de S, directamente, usando el teorema de Stokes y aplicando el teorema de Gauss.



Solución: El rotacional del campo vectorial F es

$$\operatorname{rot} F=\nabla\times F=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ xy & yz & zx \end{vmatrix}=(-y,-z,-x).$$

Los puntos de la semiesfera situados en el interior del cilindro verifican $0\leq x^2+y^2=4-z^2\leq 1$, luego $3\leq z^2\leq 4$, lo que implica $\sqrt{3}\leq z\leq 2$. Por tanto, la superficie $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4,\ \sqrt{3}\leq z\leq 2\right\}$ y elegimos la parametrización dada por las coordenadas cilíndricas

$$S(r,\theta)=\left(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{4-r^2}\right),\quad 0\leq r\leq 1,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental es

$$S_r\times S_\theta=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \dfrac{-2r}{2\sqrt{4-r^2}} \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}=\left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}},\frac{r^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{4-r^2}},r\right),$$

y tiene la orientación exterior a la semiesfera porque en el punto $S(1,0)=\left(1,0,\sqrt{3}\right)$, el producto vectorial $S_r\times S_\theta(1,0)=\left(1/\sqrt{3},0,1\right)$. A continuación, calculamos

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F(S(r,\theta))\cdot S_r\times S_\theta &=\left(-r\operatorname{sen}\theta,-\sqrt{4-r^2},-r\cos\theta\right)\cdot\left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}},\frac{r^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{4-r^2}},r\right)\\ &=-\left(\frac{r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}}+r^2\operatorname{sen}\theta+r^2\cos\theta\right).\end{aligned}$$

El flujo exterior del campo $\operatorname{rot} F$ a través de S es

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} F\cdot N\,dS &=-\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}}+r^2\operatorname{sen}\theta+r^2\cos\theta\right)d\theta\,dr\\ &=-\int_0^1\left(\frac{r^3}{\sqrt{4-r^2}}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}+r^2\left[-\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi}\right)dr\\ &=0.\end{aligned}$$

El teorema de Stokes asegura que $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = \oint_C F \cdot dr$, donde la curva C, que es la frontera de S, viene dada por $x^2 + y^2 = 1$, $z = \sqrt{3}$. Una parametrización de la curva con orientación inducida por la superficie orientada por la normal exterior a la semiesfera es

$$r(\theta) = S(1, \theta) = \left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}\right), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Calculamos la integral de línea

$$\begin{aligned}
\oint_C F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} F(r(\theta)) \cdot r'(\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}\cos\theta\right) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) d\theta \\
&= \left[-\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3} + \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Para aplicar el teorema de Gauss, consideramos el sólido U cuyas fronteras son S y la superficie T definida por $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = \sqrt{3}$. El teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint_{S \cup T} \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = \iiint_U \operatorname{div}(\operatorname{rot} F)\, dx\, dy\, dz = 0,$$

porque $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)(x, y, z) = 0$. En consecuencia,

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = -\iint_T \operatorname{rot} F \cdot N\, dS.$$

Parametrizamos la superficie T mediante

$$T(r, \theta) = \left(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}\right), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r),$$

está orientado hacia el interior de U, por lo que debemos integrar

$$-\operatorname{rot} F(T(r, \theta)) \cdot T_r \times T_\theta = \left(r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}, r\cos\theta\right) \cdot (0, 0, r) = r^2\cos\theta.$$

El flujo exterior, a través de T, del rotacional del campo F es

$$\iint_T \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\, d\theta\, dr = \int_0^1 r^2 \left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi} dr = 0,$$

lo que implica el resultado pedido.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 12 de Septiembre de 2006

Primera parte

Ejercicio 1. A medianoche, el barco *Arrow* se encuentra situado a 100 kilómetros en dirección este del barco *Blue*. El barco *Arrow* navega hacia el oeste a 12 km/h, y el barco *Blue* lo hace hacia el sur a 10 km/h. ¿A qué hora se encontrarán a distancia mínima uno del otro? ¿Cúal es la distancia mínima?

Solución. Elegimos un sistema cartesiano de coordenadas con centro en el barco *Blue*, de manera que el eje x coincide con un paralelo y el semieje $x > 0$ indica la dirección este. Además, el eje y coincide con un meridiano y el semieje $y < 0$ indica la dirección sur. En el instante $t = 0$, las coordenadas de *Blue* son $B = (0, 0)$ y las de *Arrow* son $A = (100, 0)$. Dadas las velocidades y direcciones de cada navegación, las ecuaciones parámetricas de las trayectorias de los barcos *Arrow* y *Blue* son:

$$\begin{aligned} r_A(t) &= (100 - 12t, 0), \\ r_B(t) &= (0, -10t), \end{aligned}$$

donde $t \geq 0$. Entonces, la distancia entre ambos barcos es

$$d(t) = \sqrt{(100 - 12t)^2 + 100t^2}, \quad t \geq 0.$$

Para calcular la distancia mínima, definimos la función

$$f(t) = d^2(t) = (100 - 12t)^2 + 100t^2, \quad t \geq 0.$$

Los puntos críticos de esta función se obtienen resolviendo la ecuación

$$f'(t) = 2(100 - 12t)(-12) + 200t = 488t - 2400 = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{300}{61}.$$

Observemos que si $t \in [0, 300/61)$ entonces $f'(t) < 0$ y si $t > 300/61$ entonces $f'(t) > 0$. En consecuencia, la distancia mínima se alcanza en el instante $t^* = 300/61 \approx 4.91803$ y su valor es

$$d^* = d\left(\frac{300}{61}\right) = \frac{500}{61}\sqrt{61} \approx 64.0184.$$

Para calcular la hora a la que se encontrarán a distancia mínima uno del otro, el tiempo $t^* \approx 4.91803$ corresponde a 4 horas y $0.91803 \times 60 \approx 55$ minutos.

Ejercicio 2. Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n}.$$

Solución. Para calcular la suma de la serie, observemos que integrando t^{2n} se obtiene el término $(2n+1)$ en el denominador. Por ello, usaremos la suma de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}, \quad -1 < t < 1.$$

Si $x \in (-1,1)$, integrando en el intervalo $[0,x]$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, t^{2n}\right) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^n\, t^{2n}\, dt\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \\ &= \arctan x.\end{aligned}$$

En consecuencia, para todo $x \in (-1,1)$,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Para todo $x \in (-1,1)$ tal que $x \neq 0$, tenemos

$$\frac{\arctan x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2n+1}.$$

Por ello, si elegimos $x = 1/\sqrt{3}$ obtenemos la suma de la serie

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n} &= \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{3}\, \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3}\, \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen de 12 de Septiembre de 2006
SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Calcular el valor máximo de la función

$$f(x,y,z) = x + 2y - z,$$

en el recinto

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \;\; x + y + z \geq 0 \right\}.$$

Solución. La función f es continua en el recinto cerrado y acotado S. Por lo tanto f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en S. Para calcular el valor máximo, observemos que $\nabla f(x,y,z) = (1,2,-1)$, por lo que f no tiene puntos críticos. Entonces, calculamos los valores extremos en la frontera de S, que está formada por la unión de las tres superficies descritas por

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \;\; x + y + z \geq 0 \right\}, \\ S_2 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \;\; x + y + z = 0 \right\}, \\ S_3 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \;\; x + y + z = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Para obtener los valores extremos en S_1, aplicamos el criterio de los multiplicadores de Lagrange a $f(x,y,z) = x + 2y - z$, resolviendo el sistema dado por $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ y las restricciones

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1, \;\; x + y + z \geq 0.$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x, \\ 2 &= 2\lambda y, \\ -1 &= 2\lambda z. \end{aligned}$$

Dado que $\lambda \neq 0$, obtenemos $2x = y = -2z$. Sustituyendo en la restricción dada por la igualdad

$$x^2 + 4x^2 + x^2 = 1 \iff 6x^2 = 1 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}},$$

lo que nos proporciona los puntos

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right), \quad P_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

El punto P_2 no satisface la restricción dada por la desigualdad $x+y+z \geq 0$, por lo que sólo consideramos el punto P_1.

Para obtener los valores extremos en S_2, resolvemos el sistema dado por $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla h(x,y,z)$ y las restricciones

$$h(x,y,z) = x+y+z = 0, \;\; x^2+y^2+z^2 \leq 1.$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda, \\ 2 &= \lambda, \\ -1 &= \lambda, \end{aligned}$$

por lo que el sistema no tiene solución.

Finalmente, para obtener los valores extremos en S_3, resolvemos el sistema dado por $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z)$ y las restricciones

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2 = 1, \\ h(x,y,z) &= x+y+z = 0. \end{aligned}$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x + \mu, \\ 2 &= 2\lambda y + \mu, \\ -1 &= 2\lambda z + \mu. \end{aligned}$$

Eliminamos el parámetro μ restando las ecuaciones y obteniendo

$$\begin{cases} 2\lambda y - 2\lambda x = 1, \\ 2\lambda y - 2\lambda z = 3, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y - x = 1/2\lambda, \\ y - z = 3/2\lambda, \end{cases}$$

porque $\lambda \neq 0$, ya que si $\lambda = 0$ el sistema es incompatible. Eliminando λ obtenemos $3y - 3x = y - z$, lo que implica

$$\begin{aligned} 3x - 2y - z &= 0, \\ x + y + z &= 0, \end{aligned}$$

usando una restricción. Sumando se obtiene $4x = y$, $z = -x - y = -5x$, por lo que la otra restricción es

$$x^2 + 16x^2 + 25x^2 = 1 \Longleftrightarrow 42x^2 = 1 \Longleftrightarrow x \pm \frac{1}{\sqrt{42}},$$

lo que nos proporciona los puntos

$$P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{-5}{\sqrt{42}}\right), \quad P_4 = \left(\frac{-1}{\sqrt{42}}, \frac{-4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}\right).$$

Calculamos el valor de la función en los tres puntos seleccionados

$$f(P_1) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} = 2.4495, \quad f(P_3) = \frac{14}{\sqrt{42}} = 2.1602, \quad f(P_4) = \frac{-14}{\sqrt{42}} < 0,$$

luego el valor máximo de f es $\sqrt{6}$ y se alcanza en P_1.

Ejercicio 4. Hallar el flujo exterior del campo vectorial

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z),$$

sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solución. Parametrizamos la esfera con radio a y centrada en el origen usando coordenadas esféricas,

$$S(\Phi, \theta) = (a \operatorname{sen} \Phi \cos \theta, a \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} \theta, a \cos \Phi),$$

donde $0 \leq \Phi \leq \pi, \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

El producto vectorial fundamental es

$$\begin{aligned} S_\Phi \times S_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \Phi \cos \theta & a \cos \Phi \operatorname{sen} \theta & -a \operatorname{sen} \Phi \\ -a \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} \theta & a \operatorname{sen} \Phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(a^2 \operatorname{sen}^2 \Phi \cos \theta, a^2 \operatorname{sen}^2 \Phi \operatorname{sen} \theta, a^2 \operatorname{sen} \Phi \cos \Phi\right). \end{aligned}$$

En el punto $S(\pi/2, 0) = (a, 0, 0)$ el producto es $S_\Phi \times S_\theta (\pi/2, 0) = \left(a^2, 0, 0\right)$, por lo que la superficie está orientada hacia el exterior del sólido encerrado por S. Entonces tenemos que integrar el producto escalar

$$\begin{aligned} F(S(\Phi, \theta)) \cdot (S_\Phi \times S_\theta) &= \frac{1}{(a^2)^{3/2}} (a \operatorname{sen} \Phi \cos \theta, a \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} \theta, a \cos \Phi) \cdot (S_\Phi \times S_\theta) \\ &= \frac{1}{a^3} \left(a^3 \operatorname{sen}^3 \Phi \cos^2 \theta + a^3 \operatorname{sen}^3 \Phi \operatorname{sen}^2 \theta + a^3 \operatorname{sen} \Phi \cos^2 \Phi\right) \\ &= \operatorname{sen}^3 \Phi + \operatorname{sen} \Phi \cos^2 \Phi \\ &= \operatorname{sen} \Phi. \end{aligned}$$

Entonces, el flujo exterior del campo F sobre la superficie S es

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot N \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \Phi \, d\Phi \, d\theta \\ &= 2\pi \left[-\cos \Phi\right]_0^{\pi} \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 26 de Junio de 2007

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Determinar los puntos de máxima y mínima pendiente de la gráfica de la función

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Solución. La pendiente de la gráfica de la función dada es

$$y' = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Los puntos críticos de y' se obtienen resolviendo la ecuación $y'' = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{-2\left(1+x^2\right)^2 + 8x^2\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4} \\ &= \frac{-2\left(1+x^2\right) + 8x^2}{\left(1+x^2\right)^3} \\ &= \frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación son los puntos críticos:

$$6x^2 - 2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A continuación, obtenemos los conjuntos de crecimiento y decrecimiento de y'. Si $|x| < 1/\sqrt{3}$ entonces $x^2 < 1/3$, luego $6x^2 - 2 < 0$, siendo $y'' < 0$. Entonces la pendiente y' es decreciente en el intervalo $\left(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)$. Si $|x| > 1/\sqrt{3}$ tenemos que $y'' > 0$, luego la pendiente y' es creciente en el conjunto $\left(-\infty, -1/\sqrt{3}\right) \cup \left(1/\sqrt{3}, \infty\right)$.

Si $x < -1/\sqrt{3}$ la pendiente es creciente y si $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ es decreciente, luego la máxima pendiente se alcanza en el punto $\left(-1/\sqrt{3}, 3/4\right)$ de la gráfica de y.

Si $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ la pendiente es decreciente y si $x > 1/\sqrt{3}$ es creciente, luego la mínima pendiente se alcanza en $\left(1/\sqrt{3}, 3/4\right)$.

Ejercicio 2. Sea R la región plana limitada por la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}, \quad x\geq 0,$$

el eje OX y el eje OY. Consideramos los sólidos que se obtienen cuando la región R gira en torno al eje OX y al eje OY. Calcular el volumen de dichos sólidos.

Solución.

El volumen cuando la región R gira en torno al eje OX, usando el método de los discos, viene determinado por la integral

$$V_1=\pi\int_0^\infty f(x)^2dx=\pi\int_0^\infty\frac{1}{x^2+4}dx$$

mientras que el volumen, cuando dicha región gira en torno del eje OY, utilizando el método de las capas, está determinada por la integral

$$V_2=2\pi\int_0^\infty xf(x)dx=2\pi\int_0^\infty x\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx.$$

Ahora calculamos estas intergrales impropias:

$$\begin{aligned}V_1&=\pi\int_0^\infty f(x)^2dx=\pi\int_0^\infty\frac{1}{x^2+4}dx=\pi\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{1}{x^2+4}dx\\&=\pi\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^b=\frac{\pi}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\arctan\left(\frac{b}{2}\right)\right]=\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_2&=2\pi\int_0^\infty xf(x)dx=2\pi\int_0^\infty\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx\\&=2\pi\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx=2\pi\lim_{b\to\infty}\left[\sqrt{x^2+4}\right]_0^b\\&=2\pi\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{b^2+4}\right)-4\pi=\infty.\end{aligned}$$

El volumen V_2 también puede calcularse utilizando el método de los discos. En este caso tendríamos que despejar x en la función $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$, obteniendo $x=g(y)=\sqrt{\dfrac{1}{y^2}-4}$, donde $y\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$. En este caso, el volumen es

$$\begin{aligned}V_2&=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}g(y)^2dy=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{y^2}-4\right)dy=\pi\lim_{a\to0^+}\int_a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{y^2}-4\right)dy\\&=\pi\lim_{a\to0^+}\left[-\frac{1}{y}-4y\right]_a^{\frac{1}{2}}=\pi\left[-2-2+\lim_{a\to0^+}\left(\frac{1}{a}+4a\right)\right]=\infty.\end{aligned}$$

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen Final. 26 de Junio de 2007
SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Sea $T(x,y,z) = 100 + x^2 + y^2$ la temperatura en cada punto de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. Hallar las temperaturas máxima y mínima en la curva formada por la intersección de la superficie esférica y el plano $x - z = 0$.

Solución. La función objetivo es $T(x,y,z) = 100 + x^2 + y^2$, siendo las restricciones

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 = 50, \\ h(x,y,z) &= x - z = 0. \end{aligned}$$

El criterio de los multiplicadores de Lagrange asegura que los extremos en la curva satisfacen el sistema dado por

$$\nabla T(x,y,z) = \lambda\,\nabla g(x,y,z) + \mu\,\nabla h(x,y,z).$$

Las tres ecuaciones de sistema son

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda x + \mu, \\ 2y &= 2\lambda y, \\ 0 &= 2\lambda z - \mu. \end{aligned}$$

La tercera ecuación implica $\mu = 2\lambda z$, por lo que $x = \lambda x + \lambda z$. La segunda ecuación implica $y(1-\lambda) = 0$, por lo que $y = 0$ o bien $\lambda = 1$.

Si $y = 0$, entonces las restriciones se convierten en

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= 50, \\ x - z &= 0, \end{aligned}$$

luego $2x^2 = 50$, lo que nos da los puntos $P_1 = (5,0,5)$ y $P_2 = (-5,0,-5)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $x = x + z$, luego $z = 0$, y las restricciones implican que $x = 0$, $y^2 = 50$. Así obtenemos los puntos $P_3 = \left(0, 5\sqrt{2}, 0\right)$ y $P_4 = \left(0, -5\sqrt{2}, 0\right)$. Los valores de la temperatura en dichos puntos son

$$T(P_1) = T(P_2) = 125, \quad T(P_3) = T(P_4) = 150,$$

por lo que el máximo absoluto se alcanza en P_3 y P_4, mientras que el mínimo absoluto se alcanza en P_1 y P_2.

Ejercicio 4. Sea R la región plana interior a la curva

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

a) Utilizar el cambio de variables $u = x/2$, $v = y/\sqrt{2}$ para calcular la integral doble
$$\iint_R (8 - 2x^2 - 4y^2)\, dx\, dy.$$

b) Calcular el volumen del sólido
$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 9 - 2x^2 - 4y^2\right\}.$$

c) Calcular el flujo exterior del campo vectorial
$$F(x, y, z) = \left(8x + z, 2xz^2, -4y^2\right)$$
a través de la frontera S del sólido Q.

Solución. a) El cambio de variables dado es $x = 2u$, $y = \sqrt{2}v$, por lo que la región R se transforma en el plano uv en

$$T = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\right\}.$$

A continuación, calculamos el jacobiano

$$\frac{\partial\,(x, y)}{\partial\,(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}.$$

Usando el teorema del cambio de variables, calculamos la integral doble,

$$\begin{aligned}
\iint_R (8 - 2x^2 - 4y^2)\, dx\, dy &= \iint_T \left(8 - 8u^2 - 8v^2\right) 2\sqrt{2}\, du\, dv \\
&= 16\sqrt{2} \iint_T (1 - u^2 - v^2)\, du\, dv \\
&= 16\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - r^2\right) r\, dr\, d\theta,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el cambio a coordenadas polares dado por $u = r\cos\theta$, $v = r \operatorname{sen}\theta$. Finalmente

$$\begin{aligned}
\iint_R (8 - 2x^2 - 4y^2)\, dx\, dy &= 16\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta \\
&= 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta = 8\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

b) El volumen del sólido Q puede calcularse mediante la integral triple

$$V(Q) = \iiint_Q dx\, dy\, dz = \iint_R \left(9 - 2x^2 - 4y^2 - 1\right)\, dx\, dy,$$

siendo R la proyección del sólido sobre el plano de ecuación $z = 0$, que es la región plana limitada por la curva de ecuación $9 - 2x^2 - 4y^2 - 1 = 0$, es decir la curva plana de ecuación $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$. Usando el resultado del apartado a), obtenemos que

$$V(Q) = \iint_R \left(8 - 2x^2 - 4y^2\right)\, dx\, dy = 8\sqrt{2}\pi.$$

c) Para calcular el flujo a través de la superficie cerrada S utilizamos el teorema de Gauss de la divergencia,

$$\iint_S (F.N)\, dS = \iiint_Q \operatorname{div}(F)\, dx\, dy\, dz.$$

Como la divergencia del campo dado es $\operatorname{div}(F) = F_x + F_y + F_z = 8$, obtenemos

$$\iint_S (F.N)\, dS = \iiint_Q \operatorname{div}(F) dx dy dz = 8 \iiint_Q dx\, dy\, dz = 64\sqrt{2}\pi,$$

usando el resultado del apartado b).

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 18 de Enero de 2007

Ejercicio 1. Se consideran las rectas que pasan por el punto $(1, 8)$ y cortan a los semiejes positivos. Determinar la distancia mínima entre los puntos de corte y obtener la recta que verifica dicha propiedad.

Solución: La ecuación de las rectas que pasan por el punto $(1, 8)$ y cortan a los semiejes positivos es $y - 8 = m(x - 1)$, $-\infty < m < 0$. Para calcular los puntos de corte con el semieje $y = 0$, $x > 0$, resolvemos $m(x - 1) = -8$, obteniendo

$$A(m) = \left(1 - \frac{8}{m}, 0\right) = \left(\frac{m-8}{m}, 0\right).$$

Los puntos de corte con el semieje $x = 0$, $y > 0$, se obtienen resolviendo $y - 8 = -m$, por lo que son $B(m) = (0, 8 - m)$. Entonces, la distancia entre los puntos de corte es

$$F(m) = d(A(m), B(m)) = \sqrt{\left(\frac{m-8}{m}\right)^2 + (8-m)^2} = \sqrt{(m-8)^2\left(\frac{1}{m^2} + 1\right)}$$

$$= |m - 8|\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1} = (8 - m)\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}, \quad -\infty < m < 0.$$

Calculamos los puntos críticos mediante

$$F'(m) = -\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1} + (8 - m)\frac{\frac{-2}{m^3}}{2\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}} = \frac{-\left(\frac{1}{m^2} + 1\right) - \frac{(8-m)}{m^3}}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}}$$

$$= \frac{-m - m^3 - 8 + m}{m^3\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}} = \frac{-m^3 - 8}{m^3\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}} = 0.$$

La única solución real de la ecuación $m^3 = -8$ es $m = \sqrt[3]{-8} = -2$, que pertenece al intervalo $(-\infty, 0)$.

Para probar que $F(m)$ alcanza su valor mínimo en $m = -2$, usaremos el criterio de la primera derivada. Si $m < -2$ entonces $m^3 < -8$ y $m^3 < 0$ porque $m < 0$. Por tanto $F'(m) < 0$ y $F(m)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, -2)$. Si $-2 < m < 0$ entonces $m^3 > -8$ y $m^3 < 0$. Por ello $F'(m) > 0$ y $F(m)$ es creciente en el intervalo $(-2, 0)$. Entonces

$$F(-2) = 10\sqrt{\frac{1}{4} + 1} = 10\sqrt{\frac{5}{4}} = 5\sqrt{5}$$

es el mínimo absoluto de $F(m)$ en el abierto $(-\infty, 0)$. La recta con distancia mínima entre los puntos de corte es $y - 8 = -2(x - 1)$.

Ejercicio 2. Un toro se forma al girar la región contenida en la circunferencia

$$(x-2)^2 + y^2 = 1,$$

alrededor del eje y. Calcular el volumen de este sólido de revolución, usando el método de las arandelas y el método de las capas.

Solución: Las funciones que representan las fronteras de la región son

$$x = 2 + \sqrt{1-y^2}, \quad x = 2 - \sqrt{1-y^2},$$

donde $y \in [-1, 1]$. El volumen, usando el método de las arandelas, es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} \left[\left(2 + \sqrt{1-y^2}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{1-y^2}\right)^2 \right] dy \\ &= \pi \int_{-1}^{1} 8\sqrt{1-y^2}\, dy = 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt \\ &= 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = 8\pi \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 8\pi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 4\pi^2, \end{aligned}$$

usando el cambio de variable $y = \operatorname{sen} t$.

Dado que el eje de giro es y, la variable para el método de las capas es x. El radio de cada cilindro es $r = x$. Las fronteras de la región vienen dadas por $y = \pm\sqrt{1-(x-2)^2}$, $x \in [1, 3]$. Entonces, la altura es $h = 2\sqrt{1-(x-2)^2}$. El volumen, usando el método de las capas, es

$$V = 2\pi \int_{1}^{3} r h\, dx = 4\pi \int_{1}^{3} x\sqrt{1-(x-2)^2}\, dx.$$

Para calcular la integral, consideramos el cambio de variable

$$x - 2 = \operatorname{sen} t, \quad dx = \cos t\, dt, \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 + \operatorname{sen} t) \cos^2 t\, dt \\ &= 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2\cos^2 t + \cos^2 t \operatorname{sen} t\right) dt \\ &= 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \cos 2t + \cos^2 t \operatorname{sen} t\right) dt \\ &= 4\pi \left[t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 4\pi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 4\pi^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Para cada número natural $n \geq 2$, sea r_n la recta determinada por los puntos $(1,2)$ y $(n,0)$. Consideremos la región plana R_n comprendida entre las rectas r_{2n}, r_{2n+1} y las rectas de ecuación $x = 1$ y $x = 2$.

a) Calcular el área a_n de la región R_n, para cada $n \geq 1$.

b) Calcular el radio y el dominio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Solución: **a)** La ecuación de la recta r_n que pasa por los puntos $(1,2)$ y $(n,0)$ es

$$y - 2 = \frac{-2}{n-1}(x-1), \quad n \geq 2.$$

Las rectas r_n cortan a la recta $x = 1$ en el punto $(1,2)$ y cortan a la recta $x = 2$ en los puntos

$$(x_n, y_n) = \left(2, 2 - \frac{2}{n-1}\right), \quad n \geq 2.$$

Cada región plana R_n es un triángulo de altura igual a 1 y base

$$\begin{aligned} y_{2n+1} - y_{2n} &= \left(2 - \frac{2}{2n+1-1}\right) - \left(2 - \frac{2}{2n-1}\right) = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{2n - (2n-1)}{(2n-1)\,n} = \frac{1}{(2n-1)\,n}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Entonces, el área de la región R_n es $a_n = \frac{1}{(2n-1)2n}$, para cada $n \geq 1$.

b) El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)2n}}{\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n-1)\,2n} = 1,$$

por lo que la serie es absolutamente convergente en el intervalo $(-1,1)$. En el extremo $x = 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\,2n}$$

tiene el mismo carácter que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, por lo que es convergente. En el extremo $x = -1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)\,2n}$$

es absolutamente convergente, por lo que también es convergente. Por tanto, el dominio de convergencia de la serie de potencias es $[-1,1]$.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 1 de Junio de 2007

Ejercicio 1.

(a) Calcular el área de la región plana encerrada por la lemniscata de ecuación $\left(x^2+y^2\right)^2 = 9\left(x^2-y^2\right)$.

(b) Obtener el volumen del sólido interior al cilindro de ecuación

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 9\left(x^2-y^2\right)$$

y al hemisferio de ecuación $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

Solución: (a) La ecuación de la lemniscata en coordenadas polares es $r^4 = 9r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)$. Usando una identidad trigonométrica y simplificando obtenemos $r^2 = 9\cos(2\theta)$. El área puede calcularse utilizando la fórmula para curvas en coordenadas polares $A(R) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$, o mediante la integral doble $A(R) = \iint\limits_R dx\,dy$. Utilizando la simetría de la curva, el área es

$$A(R) = 4\,\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\theta)\,d\theta = \frac{36}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)d\theta = 18\left[\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 9.$$

Usando integración doble, teniendo en cuenta la simetría de la curva y con el cambio a coordenadas polares, obtenemos

$$A(R) = \iint\limits_R dx\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{9\cos(2\theta)}} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[r^2\right]_0^{\sqrt{9\cos(2\theta)}} d\theta$$

$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)\,d\theta = 18\left[\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 9.$$

(b) Para calcular el volumen usaremos coordendas cilíndricas. Haciendo uso de la simetría del sólido y teniendo en cuenta que la ecuación del hemisferio en coordenadas cilíndricas es $z=\sqrt{9-r^2}$, obtenemos

$$V = \iint\limits_R \sqrt{9-x^2-y^2}\,dx\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{9\cos(2\theta)}} \sqrt{9-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\left(9-r^2\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{9\cos(2\theta)}} d\theta = -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((9-9\cos(2\theta))^{3/2}-27\right) d\theta$$

$$= 36\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-(1-\cos(2\theta))^{3/2}\right) d\theta = 36\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-\left(2\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}\right) d\theta$$

$$= 36\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-2\sqrt{2}\operatorname{sen}^3\theta\right) d\theta = 9\pi - 72\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-\cos^2\theta\right)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

$$= 9\pi - 72\sqrt{2}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(3\pi - 16\sqrt{2}+20\right).$$

Ejercicio 2.
Hallar el punto más alto de la curva dada por la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36, \quad 2x + y - z = 2.$$

Solución: Aplicamos el criterio de los multiplicadores de Lagrange a la función altura $f(x, y, z) = z$, resolviendo el sistema dado por

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$$

y las restricciones

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ h(x, y, z) &= 2x + y - z = 2. \end{aligned}$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda x + 2\mu, \\ 0 &= 2\lambda y + \mu, \\ 1 &= 2\lambda z - \mu. \end{aligned}$$

La segunda ecuación implica $\mu = -2\lambda y$, por lo que la primera y la tercera son

$$2\lambda x - 4\lambda y = 0, \quad 2\lambda z + 2\lambda y = 1.$$

La primera implica que $\lambda (x - 2y) = 0$, y la tercera que $\lambda \neq 0$, por lo que obtenemos $x = 2y$. Sustituyendo en la segunda restricción $5y - z = 2$, por lo que $z = 5y - 2$. Entonces, la primera restricción implica

$$4y^2 + y^2 + (5y - 2)^2 = 36 \Longleftrightarrow 30y^2 - 20y - 32 = 0.$$

Resolvemos la ecuación $15y^2 - 10y - 16 = 0$, obteniendo

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 960}}{30} = \frac{5 \pm \sqrt{265}}{15}.$$

Dado que $z = 5y - 2$, el punto de la curva con coordenada z mayor es

$$P = \left(\frac{10 + 2\sqrt{265}}{15}, \frac{5 + \sqrt{265}}{15}, \frac{-1 + \sqrt{265}}{3} \right).$$

Ejercicio 3.
Sea S la superficie definida por $z = 1 - x^2 - y^2,\ x + z \geq 1$ y sea F el campo vectorial definido por $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$. Calcular el flujo exterior del campo F a través de S, directamente y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss.

Solución: Elegimos la parametrización $S(x, y) = \left(x, y, 1 - x^2 - y^2\right)$, donde el dominio de definición D es

$$x + z = x + 1 - x^2 - y^2 \geq 1 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \leq x.$$

El producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1),$$

y tiene la orientación exterior al paraboloide porque en el punto $S(0, 0) = (0, 0, 1)$, el producto vectorial $S_x \times S_y (0, 0) = (0, 0, 1)$. Calculamos el producto escalar

$$\begin{aligned} F(S(x, y)) \cdot S_x \times S_y &= \left(y\left(1 - x^2 - y^2\right), x\left(1 - x^2 - y^2\right), xy\right) \cdot (2x, 2y, 1) \\ &= 4xy\left(1 - x^2 - y^2\right) + xy = xy\left(5 - 4x^2 - 4y^2\right). \end{aligned}$$

El flujo exterior del campo F a través de S es

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot N \, dS &= \iint_D xy\left(5 - 4x^2 - 4y^2\right) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \left(5 - 4r^2\right) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} \left(5r^3 - 4r^5\right) \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{5r^4}{4} - \frac{4r^6}{6}\right]_0^{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{5}{4}\cos^5\theta \operatorname{sen}\theta - \frac{2}{3}\cos^7\theta \operatorname{sen}\theta\right) d\theta \\ &= \left[-\frac{5}{4}\frac{\cos^6\theta}{6} + \frac{2}{3}\frac{\cos^8\theta}{8}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

usando el cambio a coordenadas polares en la integral doble, que transforma $x^2 + y^2 \leq x$ en $0 \leq r \leq \cos\theta$ y $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Para aplicar el teorema de Gauss, consideramos el sólido U cuyas fronteras son S y la superficie T definida por $x^2 + y^2 \leq x$, $x + z = 1$. El teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint\limits_{S \cup T} F \cdot N \, dS = \iiint\limits_{U} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 0,$$

porque $\operatorname{div} F(x, y, z) = 0$. En consecuencia,

$$\iint\limits_{S} F \cdot N \, dS = -\iint\limits_{T} F \cdot N \, dS.$$

Dado que $z = 1 - x$, parametrizamos la superficie T mediante

$$T(x, y) = (x, y, 1 - x), \quad x^2 + y^2 \leq x.$$

El producto vectorial fundamental

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 0, 1),$$

está orientado hacia el interior de U, por lo que debemos integrar

$$-F(T(x, y)) \cdot T_x \times T_y = -(y(1 - x), x(1 - x), xy) \cdot (1, 0, 1) = -y.$$

Para calcular el flujo exterior de F a través de T, usaremos el cambio a coordenadas polares en la integral doble

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{T} F \cdot N \, dS &= \iint\limits_{D} -y \, dx \, dy \\
&= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{\cos\theta} r \operatorname{sen}\theta \, r \, dr \, d\theta \\
&= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \\
&= -\frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

lo que implica el resultado pedido.

CÁLCULO

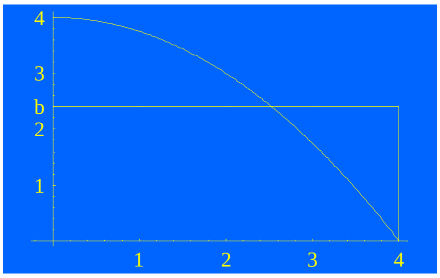
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 3 de Septiembre de 2007

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. La gráfica de la función $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ en el intervalo $[0, 4]$ gira alrededor de la recta $y = b$, donde $b \in [0, 4]$. Calcular el volumen del sólido resultante en función de b. Hallar el valor de b que hace mínimo el volumen de dicho sólido.

Solución. El volumen, usando el método de los discos, es $V(b) = \pi \int_0^4 [r(x)]^2 \, dx$, siendo el radio $r(x) = |y(x) - b|$ para $x \in [0, 4]$.



En primer lugar, calculamos

$$
\begin{aligned}
[r(x)]^2 = (y(x) - b)^2 &= \left(4 - \frac{x^2}{4} - b\right)^2 \\
&= \frac{x^4}{16} + \frac{bx^2}{2} - 2x^2 + b^2 - 8b + 16.
\end{aligned}
$$

A continuación, obtenemos

$$
\begin{aligned}
V(b) &= \pi \int_0^4 \left(\frac{x^4}{16} + \frac{(b-4)x^2}{2} + b^2 - 8b + 16\right) dx \\
&= \pi \left[\frac{x^5}{80} + \frac{(b-4)x^3}{6} + \left(b^2 - 8b + 16\right)x\right]_0^4 \\
&= \pi \left(4b^2 - \frac{64b}{3} + \frac{512}{15}\right).
\end{aligned}
$$

La función $V(b)$ es continua en el intervalo cerrado y acotado $[0, 4]$, por lo que tiene extremos absolutos. Dado que es derivable, calculamos los puntos críticos resolviendo la ecuación $V'(b) = \pi(8b - 64/3) = 0$. El único punto crítico $b = 8/3$ pertenece al intervalo $[0, 4]$ y es un mínimo relativo porque $V''(b) = 8\pi > 0$. Además, es el mínimo absoluto porque

$$
V\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{256}{45}\pi < V(4) = \frac{64}{5}\pi < V(0) = \frac{512}{15}\pi.
$$

Ejercicio 2. Dada la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\, 2^{2n+1}},$$

estudiar su carácter y calcular su suma usando una función conocida.

Solución. Para analizar el carácter de la serie, calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\, 2^{2n+1}}{(2n+3)\, 2^{2n+3}} = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)}{(2n+3)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Entonces el criterio del cociente implica que la serie es absolutamente convergente. Para calcular la suma de la serie, usaremos la suma de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}, \quad -1 < t < 1.$$

Si $x \in [0,1)$, integrando en el intervalo $[0,x]$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, t^{2n} \right) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^n\, t^{2n}\, dt \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \\ &= \arctan x. \end{aligned}$$

Si $x \in (-1,0]$, integrando en el intervalo $[x,0]$, obtenemos el mismo resultado. En consecuencia, para todo $x \in (-1,1)$,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Por ello, si elegimos $x = 1/2$ obtenemos la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\, 2^{2n+1}} = \arctan \frac{1}{2}.$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 3 de Septiembre de 2007

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Hallar el punto más bajo de la curva intersección del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y el plano $x + 2z = 4$.

Solución. Aplicamos el criterio de los multiplicadores de Lagrange a la función altura $f(x, y, z) = z$, resolviendo el sistema dado por

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$$

y las restricciones

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ h(x, y, z) &= x + 2z = 4. \end{aligned}$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda x + \mu, \\ 0 &= 2\lambda y, \\ 1 &= -2\lambda z + 2\mu. \end{aligned}$$

La segunda ecuación implica que $\lambda = 0$ o bien $y = 0$. Si $\lambda = 0$, usando las ecuaciones primera y tercera, tenemos que $\mu = 0$ y $2\mu = 1$, que es una contradicción. Así, obtenemos que $y = 0$. Sustituyendo en la primera restricción $x^2 = z^2$, por lo que $z = x$ o bien $z = -x$. Entonces, para $z = x$, la segunda restricción implica $3x = 4$, por lo que obtenemos el punto

$$P = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right).$$

Si $z = -x$, la segunda restricción implica $-x = 4$, obteniendo el punto $Q = (-4, 0, 4)$. Los valores de la función altura en dichos puntos son

$$f(P) = \frac{4}{3} < f(Q) = 4,$$

luego P es el punto más bajo de la curva.

Ejercicio 4. Calcular la integral de línea

$$\oint_C (8x+z)\,dx + 2xz^2\,dy - 4y^2\,dz,$$

siendo C la curva definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} z = 9 - 2x^2 - 4y^2, \\ z = 1, \end{cases}$$

que tiene orientación positiva si se observa desde un punto alto del eje OZ.

Solución. Calculamos directamente la integral de línea. Observemos que los semiejes de la elipse $2x^2+4y^2=8$ son $a=2$ y $b=\sqrt{2}$. La elipse contenida en el plano $z=1$, se parametriza mediante $r(\theta) = \left(2\cos\theta, \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta, 1\right)$, donde $\theta \in [0, 2\pi]$. Entonces la integral de línea es

$$\begin{aligned}
\oint_C F.\,dr &= \int_0^{2\pi} \left[(16\cos\theta+1)(-2\operatorname{sen}\theta) + 4\cos\theta\sqrt{2}\cos\theta\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-32\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta + 4\sqrt{2}\cos^2\theta\right) d\theta \\
&= \left[-16\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos\theta\right]_0^{2\pi} + 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= 4\sqrt{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = 4\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

Otro método es calcular la integral de línea usando el teorema de Stokes. Observemos que la curva C es la frontera de la superficie

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2+4y^2 \le 8, \quad z = 1\right\}.$$

Parametrizamos S mediante $S(x,y) = (x,y,1)$, donde $2x^2+4y^2 \le 8$. Dado que el producto vectorial fundamental es $S_x \times S_y = (0,0,1) = N$, la orientación positiva de C viene inducida por la parametrización de S. El teorema de Stokes asegura que $\oint_C F.\,dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot N\,dS$. Calculamos

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ 8x+z & 2xz^2 & -4y^2 \end{vmatrix} = \left(-8y-4xz, 1, 2z^2\right).$$

Por lo tanto, $\operatorname{rot} F(S(x,y)) \cdot N\,dS = 2\,dx\,dy$, lo que implica

$$\oint_C F.\,dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot N\,dS = 2\iint_R dx\,dy,$$

siendo R la región interior a la elipse $2x^2+4y^2=8$. Como los semiejes de la elipse son $a=2$ y $b=\sqrt{2}$, obtenemos $\oint_C F.\,dr = 2\,\acute{a}rea\,(R) = 4\sqrt{2}\pi$.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 26 de Junio de 2008

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Consideremos los rectángulos de lados paralelos a los ejes que pueden inscribirse en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a,b>0.$$

Calcular las dimensiones y el área del rectángulo que tiene área máxima.

Solución. El vértice de un rectángulo de este tipo, situado en el primer cuadrante, es

$$\left(x, b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right), \quad 0<x<a.$$

Usando la simetría de la elipse, el área de un rectángulo inscrito es

$$A(x)=4bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{4b}{a}x\sqrt{a^2-x^2},$$

donde $0<x<a$. Los puntos críticos del área se obtienen resolviendo la ecuación $A'(x)=0$, es decir,

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}\right) \\ &= \frac{4b}{a}\left(\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

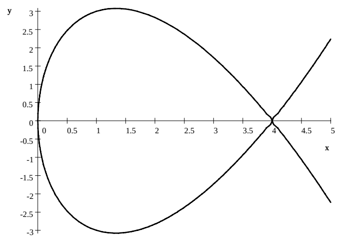
Las soluciones de esta ecuación son

$$a^2-2x^2=0 \Longleftrightarrow x^2=\frac{a^2}{2} \Longleftrightarrow x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Dado que $x\in(0,a)$ el único punto crítico es $x^*=a\big/\sqrt{2}$. Si $x\in\big(0,a\big/\sqrt{2}\big)$ entonces $x^2<a^2/2$, luego $a^2-2x^2>0$, y la función área es creciente en el intervalo $\big(0,a\big/\sqrt{2}\big)$. Si $x\in\big(a\big/\sqrt{2}\,,a\big)$ tenemos que $x^2>a^2/2$, por lo que $a^2-2x^2<0$, y la función área es decreciente en el intervalo $\big(a\big/\sqrt{2}\,,a\big)$. En consecuencia, el área máxima se alcanza en $x^*=a\big/\sqrt{2}$. Las dimensiones y el área del rectángulo de área máxima son:

$$2x^*=\frac{2a}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}a, \qquad 2y^*=2b\sqrt{1-\frac{a^2}{2a^2}}=\frac{2b}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}b, \qquad A^*=2ab.$$

Ejercicio 2. Sea R la región plana limitada por el lazo de la curva definida por $y^2 = x(4-x)^2$. Calcular los volúmenes de los sólidos que se obtienen cuando la región R gira alrededor del eje x, del eje y, y de la recta $x = 4$.



Solución.

El volumen del sólido obtenido al girar la región R en torno al eje x, usando el método de los discos, se calcula mediante la integral

$$
\begin{aligned}
V_x &= \pi \int_0^4 y^2\,dx = \pi \int_0^4 x(4-x)^2\,dx = \pi \int_0^4 \left(16x - 8x^2 + x^3\right) dx \\
&= \pi \left[8x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^4 = \frac{64}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

El volumen del sólido obtenido al girar R en torno del eje y, utilizando el método de las capas, es

$$V_y = 2\pi \int_0^4 r(x)\,h(x)\,dx,$$

donde el radio $r(x) = x$, y la altura $h(x) = 2y(x) = 2\sqrt{x}(4-x)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
V_y &= 4\pi \int_0^4 x\sqrt{x}(4-x)\,dx = 4\pi \int_0^4 \left(4x^{3/2} - x^{5/2}\right) dx \\
&= 4\pi \left[\frac{8}{5}x^{5/2} - \frac{2}{7}x^{7/2}\right]_0^4 = \frac{2048}{35}\pi.
\end{aligned}
$$

El volumen del sólido obtenido al girar R en torno a la recta $x = 4$, utilizando el método de las capas, es

$$V_r = 2\pi \int_0^4 r(x)\,h(x)\,dx,$$

donde el radio $r(x) = 4 - x$, y la altura $h(x) = 2y(x) = 2\sqrt{x}(4-x)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
V_r &= 4\pi \int_0^4 (4-x)\sqrt{x}(4-x)\,dx = 4\pi \int_0^4 \left(16x^{1/2} - 8x^{3/2} + x^{5/2}\right) dx \\
&= 4\pi \left[\frac{32}{3}x^{3/2} - \frac{16}{5}x^{5/2} + \frac{2}{7}x^{7/2}\right]_0^4 = \frac{8192}{105}\pi.
\end{aligned}
$$

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen Final. 26 de Junio de 2008
SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3.

(a) Dada la función $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 3x - 4y$, calcular sus extremos absolutos sobre la región cerrada y acotada

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \ \ x^2 + 4y^2 \leq 4\right\}.$$

(b) Sea C la curva frontera de la región D, con orientación positiva. Calcular la integral de línea

$$\oint_C xy\,dx + x^2\,dy.$$

Solución.
(a) Calculamos los puntos críticos en el interior de la región D, resolviendo el sistema $f_x = 2x - 3 = 0$, $f_y = 8y - 4 = 0$. El único punto crítico es $P_1 = (3/2\,, 1/2)$. Dado que $3/2 > 0$ y $9/4 + 1 < 4$, el punto pertenece al interior de D. A continuación, calculamos los puntos críticos sobre la frontera $F = F_1 \cup F_2$, donde F_1 se define mediante $x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \ \ x > 0$, y F_2 se define por las condiciones $x^2 + 4y^2 - 4 \leq 0, \ \ x = 0$.

En la frontera F_1, usamos el método de los multiplicadores de Lagrange, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3 = 2\lambda x, \\ 8y - 4 = 8\lambda y, \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} 2(1-\lambda)x = 3, \\ 2(1-\lambda)y = 1, \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Las ecuaciones anteriores implican que $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $\lambda \neq 1$. Dividiendo la primera ecuación entre la segunda eliminamos λ, obteniendo que $x = 3y$. Sustituyendo en la última ecuación obtenemos los puntos

$$P_2 = \left(\frac{6}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \quad \text{y} \quad P_3 = \left(-\frac{6}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

Dado que debe verificarse la condición $x > 0$, el único punto sobre la frontera F_1 es P_2. Finalmente, obtendremos los puntos críticos sobre la frontera F_2. En este caso, la función $g(y) = f\,(0,y) = 4y^2 - 4y$, definida en el intervalo $[-1,1]$, nos permite encontrar los puntos críticos sobre F_2. Resolviendo la ecuación $g'(y) = 8y - 4 = 0$, obtenemos $y = 1/2$, y el punto de la frontera $P_4 = (0, 1/2)$. Además, tenemos que considerar los extremos -1 y 1 del intervalo, es decir los puntos $P_5 = (0, 1)$ y $P_6 = (0, -1)$. Evaluamos la función en los puntos críticos obtenidos:

$$f(P_1) = -\frac{13}{4}, \quad f(P_2) = 4 - \frac{26}{\sqrt{13}}, \quad f(P_4) = -1, \quad f(P_5) = 0, \quad f(P_6) = 8.$$

En consecuencia, el valor mínimo es $f(P_1)$ y el valor máximo es $f(P_6)$.

(b) Calcularemos la integral de línea directamente y usando el teorema de Green. Observemos que la frontera de la región D, orientada positivamente, es la curva $C = C_1 \cup C_2$. Entonces

$$\oint_C xy\,dx + x^2\,dy = \oint_{C_1} xy\,dx + x^2\,dy + \oint_{C_2} xy\,dx + x^2\,dy,$$

donde

$$C_1 \equiv \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{y} \quad C_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \end{cases}, \quad t \in [-1, 1].$$

Calculamos la primera integral

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1} xy\,dx + x^2\,dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2\cos t \operatorname{sen} t\,(-2\operatorname{sen} t) + 4\cos^2 t\cos t\right]\,dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-4\operatorname{sen}^2 t\cos t + 4\cos^3 t\right)\,dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-8\operatorname{sen}^2 t\cos t + 4\cos t\right)\,dt \\
&= \left[-\frac{8}{3}\operatorname{sen}^3 t + 4\operatorname{sen} t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Ahora, calculamos la segunda integral $\oint_{C_2} xy\,dx + x^2\,dy = \int_{-1}^{1} 0\,dt = 0$. Por lo tanto

$$\oint_C xy\,dx + x^2\,dy = \frac{8}{3}.$$

Para usar el teorema de Green, comprobamos que la región D es simplemente conexa y el campo vectorial tiene derivadas parciales continuas en un abierto que contiene a la región D. En este caso sabemos que

$$\oint_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\,dx\,dy.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\oint_C xy\,dx + x^2\,dy &= \iint_D x\,dx\,dy = \int_0^2 \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} x\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Hallar el flujo del campo vectorial $F(x,y,z) = \left(4x, -2y^2, z^2\right)$ a través de la superficie exterior del sólido

$$x^2 + y^2 \leq x, \quad 0 \leq z \leq 3,$$

directamente y usando el teorema de Gauss.

Solución. La frontera del sólido es la superficie $S \cup T_1 \cup T_2$, donde S es el cilindro $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, $0 \leq z \leq 3$, siendo T_1 y T_2 las tapas contenidas en los planos $z = 0$ y $z = 3$ respectivamente. Usando coordenadas cilíndricas desplazadas $x = \frac{1}{2} + r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, $z = z$, los puntos de S verifican $r = 1/2$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces parametrizamos S mediante

$$S(\theta, z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta, z\right), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 3.$$

El producto vectorial fundamental es

$$S_\theta \times S_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta & \frac{1}{2}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta, 0\right),$$

y tiene la orientación exterior al sólido porque en el punto $S(0,0) = (1,0,0)$, el producto vectorial $S_\theta \times S_z(0,0) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$. Calculamos el producto escalar

$$\begin{aligned} F(S(\theta,z)) \cdot S_\theta \times S_z &= \left(2 + 2\cos\theta, -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta, z^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta, 0\right) \\ &= \cos\theta + \cos^2\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^3\theta \\ &= \cos\theta + \cos^2\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta. \end{aligned}$$

El flujo exterior del campo F a través de S es

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot N\, dS &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(\cos\theta + \cos^2\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\right) d\theta\, dz \\ &= \int_0^3 \left[\operatorname{sen}\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4} + \frac{1}{4}\cos\theta - \frac{1}{12}\cos^3\theta\right]_0^{2\pi} dz \\ &= \int_0^3 \pi\, dz = 3\pi. \end{aligned}$$

Parametrizamos las tapas usando coordenadas cartesianas, por lo que

$$T_1(x,y) = (x,y,0), \quad T_2(x,y) = (x,y,3), \quad \text{donde} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

El producto vectorial fundamental para las dos tapas es el vector $(0,0,1)$, luego T_1 tiene orientación *interior* y T_2 exterior. Dado que

$$F(T_1(x,y)) \cdot (0,0,-1) = \left(4x, -2y^2, 0\right) \cdot (0,0,-1) = 0$$

el flujo de F a través de T_1 es cero. Finalmente, calculamos

$$F\left(T_2\left(x,y\right)\right)\cdot(0,0,1)=\left(4x,-2y^2,9\right)\cdot(0,0,1)=9,$$

por lo que el flujo de F a través de T_2 es

$$\iint_T F\cdot N\,dS=\iint_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leq\left(\frac{1}{2}\right)^2} 9\,dx\,dy=9\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9\pi}{4}.$$

Entonces, el flujo de F a través de la superficie exterior del sólido es

$$\iint_{S\cup T_1\cup T_2} F\cdot N\,dS=3\pi+\frac{9\pi}{4}=\frac{21\pi}{4}.$$

Como las componentes del campo tienen derivadas parciales continuas en el sólido Q, el teorema de la divergencia de Gauss asegura que

$$\iint_{S\cup T_1\cup T_2} F\cdot N\,dS=\iiint_Q \operatorname{div}F\,dx\,dy\,dz=\iiint_Q (4-4y+2z)\ dx\,dy\,dz.$$

Para calcular la integral triple usaremos el cambio $x=\frac{1}{2}+r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, $z=z$. Entonces $Q=\{(r,\theta,z):0\leq r\leq 1/2,\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ \ 0\leq z\leq 3\}$. Dado que el jacobiano del cambio es r, tenemos que

$$\begin{aligned}
\iiint_Q (4-4y+2z)\ dx\,dy\,dz &= \int_0^{1/2}\int_0^{2\pi}\int_0^3 (4-4r\operatorname{sen}\theta+2z)\,r\,dz\,d\theta\,dr\\
&= \int_0^{1/2}\int_0^{2\pi}\left[4rz-4r^2z\operatorname{sen}\theta+rz^2\right]_0^3\,d\theta\,dr\\
&= \int_0^{1/2}\int_0^{2\pi}\left(21r-12r^2\operatorname{sen}\theta\right)\,d\theta\,dr\\
&= \int_0^{1/2}\left[21r\theta+12r^2\cos\theta\right]_0^{2\pi}\,dr\\
&= \int_0^{1/2} 42\pi r\,dr\\
&= \left[21\pi r^2\right]_0^{1/2}\\
&= \frac{21\pi}{4}.
\end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 21 de Enero de 2008

Ejercicio 1. Sea $P = \left(a, a^2\right)$ con $a > 0$ un punto cualquiera de la gráfica de la parábola $y = x^2$ situado en el semiplano $x > 0$.

(i) Demostrar que la intersección de la parábola con su recta normal en P es el punto

$$Q = \left(-a - \frac{1}{2a}, \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2\right).$$

(ii) Encontrar el valor de a que minimiza la distancia entre P y Q, razonando la respuesta.

Solución: (i) La ecuación de la recta normal a la parábola en $P = \left(a, a^2\right)$, donde $a > 0$, es $y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a)$. Dado que el punto $Q = (x, y)$ pertenece a la parábola $y = x^2$ y a la recta normal, su coordenada x verifica la ecuación

$$x^2 - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a) \Longleftrightarrow x + a = -\frac{1}{2a},$$

porque $x - a \neq 0$. Entonces, las coordenadas de Q son

$$x = -a - \frac{1}{2a}, \quad y = \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2.$$

(ii) El cuadrado de la distancia entre P y Q es

$$\begin{aligned} F(a) &= \left(-2a - \frac{1}{2a}\right)^2 + \left[\left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 - a^2\right]^2 = \left(\frac{4a^2+1}{2a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{4a^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4a^2+1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4a^2+1}{4a^2}\right)^2 = \left(\frac{4a^2+1}{2a}\right)^2\left(1 + \frac{1}{4a^2}\right) = \frac{\left(4a^2+1\right)^3}{16a^4}, \end{aligned}$$

donde $a > 0$. Calculamos los puntos críticos en $(0, \infty)$ mediante

$$\begin{aligned} F'(a) &= \frac{3\left(4a^2+1\right)^2 \ 8a \ 16a^4 - 64a^3\left(4a^2+1\right)^3}{256a^8} \\ &= \frac{64a^3\left(4a^2+1\right)^2\left(6a^2 - 4a^2 - 1\right)}{256a^8} = \frac{\left(4a^2+1\right)^2\left(2a^2-1\right)}{4a^5} = 0. \end{aligned}$$

Como $\left(4a^2+1\right)^2 > 0$, el único punto crítico en $(0, \infty)$ es la solución de la ecuación $2a^2 - 1 = 0$ tal que $a > 0$, es decir $a^* = 1\big/\sqrt{2}$. Para probar que F alcanza su valor mínimo en $a^* = 1\big/\sqrt{2}$, usaremos el criterio de la primera derivada. Si $0 < a < 1\big/\sqrt{2}$ entonces $2a^2 - 1 < 0$ y $a^5 > 0$ porque $a > 0$. Por tanto $F'(a) < 0$ y F es decreciente en el intervalo $\left(0, 1\big/\sqrt{2}\right)$. Si $a > 1\big/\sqrt{2}$ entonces $2a^2 - 1 > 0$ y $a^5 > 0$. Por ello $F'(a) > 0$ y F es creciente en el intervalo $\left(1\big/\sqrt{2}, \infty\right)$. En consecuencia, el mínimo absoluto de F en el intervalo $(0, \infty)$ se alcanza en $a^* = 1\big/\sqrt{2}$.

Ejercicio 2. Sea D la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x.

(i) Encontrar la pendiente de la recta $y = mx$ que divide la región D en dos regiones de igual área.

(ii) Calcular el volumen del sólido generado por la región acotada por la parábola y la recta obtenida en (i), al girar alrededor del eje y.

Solución: (i) La parábola corta al eje x en los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$, siendo la región acotada

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \;\; 0 \le y \le x - x^2\right\}.$$

En primer lugar, calculamos el área de esta región

$$a\,(D) = \int_0^1 \left(x - x^2\right)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

por lo que el área de cada una de las dos regiones determinadas por la recta es $1/12$. Para obtener el área de la región acotada por la parábola y la recta $y = mx$, determinamos los puntos intersección de ambas resolviendo la ecuación

$$x - x^2 = mx \Longleftrightarrow x^2 + (m-1)\,x = 0 \Longleftrightarrow x\,(x + m - 1) = 0.$$

Sus soluciones son $x = 0$ y $x = 1 - m$, por lo que los puntos intersección son $(0,0)$ y $\left(1-m, m-m^2\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{1}{12} &= \int_0^{1-m} (x - x^2 - mx)\, dx = \left[(1-m)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1-m} \\ &= \frac{(1-m)^3}{2} - \frac{(1-m)^3}{3} = \frac{(1-m)^3}{6},\end{aligned}$$

lo que implica que $(1-m)^3 = 1/2$, siendo $m = 1 - \sqrt[3]{1/2}$.

(ii) Para calcular el volumen del sólido generado por la región acotada por la parábola y la recta $y = mx$, usaremos el método de las capas. Dado que el eje de giro es y, la variable para este método es x. El radio de cada cilindro es $r = x$ y la altura es $h = x - x^2 - mx$. El volumen de esta región es

$$\begin{aligned}V\,(m) &= 2\pi \int_0^{1-m} x(x - x^2 - mx)\, dx = 2\pi \int_0^{1-m} \left((1-m)\,x^2 - x^3\right)\, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{(1-m)\,x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{1-m} = 2\pi \frac{(1-m)^4}{12} = \pi \frac{(1-m)^4}{6}.\end{aligned}$$

Dado que la pendiente de la recta obtenida en (i) es $m = 1 - \sqrt[3]{1/2}$, tenemos que $(1-m)^4 = 1/2\,\sqrt[3]{1/2}$ y el volumen pedido es

$$V = \frac{\sqrt[3]{1/2}}{12}\pi.$$

Ejercicio 3. (i) Usar la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

para calcular la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2},$$

así como su dominio de convergencia.

(ii) Dada la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{9}{10}\right)^n,$$

estudiar su carácter y calcular su suma.

Solución: (i) La suma de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1).$$

Derivando ambos términos, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Entonces, la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad x \in (-1,1).$$

Observemos que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1.$$

En los extremos $x = 1$ y $x = -1$, las series numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ son divergentes porque sus términos no convergen a cero, luego el dominio de convergencia de la serie de Maclaurin es $(-1,1)$.

(ii) La serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{9}{10}\right)^n = f\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{9/10}{(1-9/10)^2} = \frac{9/10}{(1/10)^2} = 90,$$

porque $9/10 \in (-1,1)$.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 5 de Junio de 2008

Ejercicio 1.

Consideremos la región plana $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x, \;\; x^2 + y^2 \geq 2\right\}$.

1. Calcular el área de R.
2. Sea C la curva frontera de R orientada positivamente. Calcular la integral de línea
$$\oint_C \left(2xy - y^2\right)\, dx + \left(x^2 + y\right)\, dy.$$
3. Calcular la longitud de C.

Solución: **1.** La región está en el interior de la circunferencia $r = 2\cos\theta$, donde $\theta \in [-\pi/2\,, \pi/2]$, y en el exterior de la circunferencia $r = \sqrt{2}$, donde $\theta \in [-\pi, \pi]$. Dado que $\cos\theta = \sqrt{2}/2$, las coordenadas polares de los puntos intersección de las dos circunferencias son $r = \sqrt{2}$ y $\theta = \pm\pi/4$. Usando la simetría de la región y el cambio a coordenadas polares, obtenemos el área

$$\begin{aligned} A(R) &= \iint_R dx\, dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta} r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[r^2\right]_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4\cos^2\theta - 2\right)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2 + 2\cos 2\theta - 2\right)\, d\theta = \left[\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1. \end{aligned}$$

2. El teorema de Green asegura que

$$\oint_C \left(2xy - y^2\right)\, dx + \left(x^2 + y\right)\, dy = \iint_R \left[2x - (2x - 2y)\right]\, dx\, dy = \iint_R 2y\, dx\, dy.$$

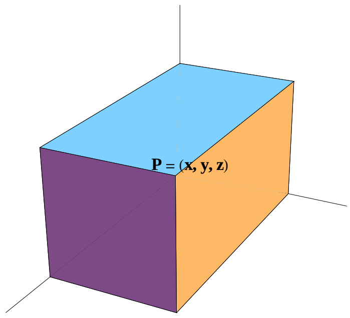
Calculamos la integral doble cambiando a coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \iint_R 2y\, dx\, dy &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta} 2r \operatorname{sen}\theta\, r\, dr\, d\theta \\ &= \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[r^3 \operatorname{sen}\theta\right]_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta} d\theta = \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\left(8\cos^3\theta - 2\sqrt{2}\right)\operatorname{sen}\theta\right] d\theta \\ &= \frac{2}{3}\left[-2\cos^4\theta + 2\sqrt{2}\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 0, \end{aligned}$$

porque $\cos\pi/4 = \cos(-\pi/4)$.

3. La curva C es la unión de dos arcos C_1 y C_2. Sea C_1 el arco comprendido entre $-\pi/4$ y $\pi/4$ de la circunferencia de radio $\sqrt{2}$ con centro en el origen. Su longitud es $\sqrt{2}\pi/2$. Como la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$ tiene radio 1 y el arco C_2 está comprendido entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, con respecto a su centro $(1,0)$, su longitud es π. Entonces, la longitud de C es la suma $\sqrt{2}\pi/2 + \pi$.

Ejercicio 2.
Una caja rectangular se coloca en el primer octante con un vértice en el origen y las tres caras adyacentes en los planos coordenados como muestra la figura. Además, el vértice $P = (x, y, z)$ con coordenadas $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, pertenece al paraboloide de ecuación $2x^2 + y^2 + z = 1$. Hallar el punto P que maximiza el volumen de la caja.



Solución: Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange al volumen $V(x, y, z) = xyz$, resolviendo el sistema dado por la ecuación

$$\nabla V(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y las restricciones

$$g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z = 1, \quad x, y, z > 0.$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} yz &= 4\lambda x, \\ xz &= 2\lambda y, \\ xy &= \lambda. \end{aligned}$$

La tercera ecuación implica $yz = 4x^2y$, $xz = 2xy^2$, por lo que $z = 4x^2 = 2y^2$ usando que $y, x > 0$. Entonces

$$g(x, y, z) = \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + z = 1 \Longrightarrow z = \frac{1}{2}.$$

Dado que $4x^2 = 1/2$, $2y^2 = 1/2$, donde $x, y > 0$, el punto P que maximiza el volumen de la caja es

$$P = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

y el volumen máximo es $1/8\sqrt{2}$.

Ejercicio 3.
Sea S la porción del paraboloide $z+1=x^2+y^2$, situada debajo del plano $z=1$, y sea $\mathbf{F}(x,y,z)=(0,x-2yz,x^2)$. Hallar $\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, donde $\mathbf{N}$ es la normal exterior al paraboloide, haciéndolo directamente, mediante el teorema de Stokes, y mediante el teorema de Gauss.

Solución. Usando coordenadas cilíndricas, la ecuación del paraboloide es $z+1=x^2+y^2=r^2$, luego una parametrización de la superficie es

$$S(r,\theta)=\left(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta,r^2-1\right),$$

donde $-1\le r^2-1\le 1$, por lo que $0\le r\le\sqrt{2},\quad 0\le\theta\le 2\pi$. El producto vectorial fundamental es

$$S_r\times S_\theta=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 2r\\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix}=\left(-2r^2\cos\theta,-2r^2\operatorname{sen}\theta,r\right).$$

En el punto $S(1,0)=(1,0,0)$, el vector $S_r\times S_\theta(1,0)=(-2,0,1)$ apunta hacia el interior del paraboloide. Entonces, la normal exterior $\mathbf{N}$ tiene la dirección opuesta al vector $S_r\times S_\theta$. Calculamos

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ D_x & D_y & D_z\\ 0 & x-2yz & x^2\end{vmatrix}=(2y,-2x,1).$$

En primer lugar, hallamos la integral de flujo directamente

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS&=-\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\mathbf{F}\left(S(r,\theta)\right)\cdot S_r\times S_\theta\,dr\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}(2r\operatorname{sen}\theta,-2r\cos\theta,1)\cdot\left(2r^2\cos\theta,2r^2\operatorname{sen}\theta,-r\right)\,dr\,d\theta\\&=-\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}r\,dr\,d\theta=-\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}}d\theta=-2\pi.\end{aligned}$$

El teorema de Stokes afirma que $\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde C es la curva frontera de S orientada positivamente por la normal exterior al paraboloide $\mathbf{N}$. Observemos que C es la intersección de S con el plano $z=1$. Entonces, $r^2-1=1$ implica $r=\sqrt{2}$, y una parametrización de C es

$$\mathbf{r}(\theta)=S\left(\sqrt{2},\theta\right)=\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta,1\right),\quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

Sin embargo, esta parametrización de C tiene el sentido contrario a las agujas del reloj, que es la orientación opuesta a la inducida por $\mathbf{N}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= -\int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(\theta\right)\right)\cdot \mathbf{r}'\left(\theta\right)\, d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \left(0, \sqrt{2}\cos\theta - 2\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta, 2\cos^2\theta\right)\cdot\left(-\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta, \sqrt{2}\cos\theta, 0\right)\, d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \left(2\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\, d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \left(1+\cos 2\theta - 2\operatorname{sen} 2\theta\right)\, d\theta \\ &= -\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} + \cos 2\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

Si consideramos el sólido Q cuyas fronteras son S y la superficie T, definida por $x^2+y^2\le 2$, $z=1$, el teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint_{S\cup T} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iiint_Q \operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right)\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Entonces el flujo exterior verifica

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = -\iint_T \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS.$$

Si definimos la parametrización $T\left(x,y\right) = \left(x,y,1\right)$ donde $x^2+y^2\le 2$, el producto vectorial fundamental

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1) = \mathbf{N}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS &= -\iint_{x^2+y^2\le 2} (2y,-2x,1)\cdot(0,0,1)\, dx\, dy \\ &= -\iint_{x^2+y^2\le 2} dx\, dy = -2\pi.\end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 3 de Julio de 2001

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Se considera la función definida por la determinación principal del arco tangente, es decir $f(x) = \arctan(x)$, tal que $-\pi/2 < f(x) < \pi/2$.

1. Obtener el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $x_0 = 1$, $P_2(x)$, y el correspondiente resto $R_2(x)$.
2. Aproximar el valor de $\arctan(1.1)$ mediante $P_2(1.1)$, obteniendo una cota del error cometido.
3. Obtener la serie de MacLaurin (serie de Taylor en $x_0 = 0$) de f y encontrar su radio de convergencia. Explicar si puede utilizarse dicha serie para calcular un valor aproximado de $\arctan(1.1)$.
4. Obtener una aproximación de $\arctan(1.1)$ resolviendo la ecuación $\tan(t) = 1.1$ por el método de Newton, realizando las iteraciones necesarias para que se repitan las tres primeras cifras decimales.

Solución.

1. El teorema de Taylor asegura que si f es diferenciable con continuidad n veces en $[a, b]$ y existe $f^{(n+1)}$ en (a, b), dados $x, x_0 \in (a, b)$, existe c entre x_0 y x tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}.$$

Las derivadas sucesivas de $f(x) = \arctan(x)$ son

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x(1+x^2)4x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}.$$

Los valores de las derivadas sucesivas de f en $x_0 = 1$ son $f(1) = \pi/4$, $f'(1) = 1/2$, $f''(1) = -1/2$. Aplicando el teorema de Taylor para $n = 2$, $x_0 = 1$, tenemos que

$$P_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2, \quad R_2(x) = \frac{1}{6}\frac{(6c^2-2)}{(1+c^2)^3}(x-1)^3,$$

donde c está entre 1 y x.

2. El valor aproximado de $\arctan(1.1)$ es $P_2(1.1) \approx 0.8329$. El error que se comete al aproximar con $P_2(1.1)$ es el valor absoluto del resto $R_2(1.1)$. Sabemos que $1 \leq c \leq 1.1$, luego acotamos dicho error mediante

$$|R_2(1.1)| \leq \frac{1}{6}\left(\frac{6(1.1)^2 - 2}{2^3}\right)(0.1)^3 = \frac{5.26}{48} \times 10^{-3} < 2 \times 10^{-4}.$$

3. La serie de MacLaurin de $f'(x)$ es

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^k x^{2k} + \cdots,$$

donde $|x| < 1$. Integrando término a término, obtenemos

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots$$

El radio de convergencia es $R = 1$ y la serie está definida en $[-1, 1]$ porque en los puntos terminales del intervalo obtenemos series alternadas convergentes.

4. Aplicamos el *método de Newton* a la ecuación $\tan(t) = 1.1$, equivalente a $g(t) = 0$, para $g(t) = \tan(t) - 1.1$. A partir del punto $t_0 = \pi/4$, la iteración

$$t_{n+1} := t_n - \frac{g(t_n)}{g'(t_n)} = t_n - \frac{\tan(t_n) - 1.1}{\sec^2(t_n)},$$

donde $n \geq 1$, nos proporciona las siguientes soluciones aproximadas:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.8353981635, \\ t_2 &= 0.8329877015, \\ t_3 &= 0.8329812667, \\ t_4 &= 0.8329812667. \end{aligned}$$

Entonces, la aproximación de $\arctan(1.1)$, obtenida con el método de Newton, es 0.8329812667.

Ejercicio 2. Un sólido se genera haciendo girar la región acotada por $y = 0$ e $y = \sqrt{9 - x^2}$ alrededor del eje y. Se perfora un orificio cilíndrico circular de radio r, centrado en el eje de revolución.

1. Obtener el volumen del sólido resultante.

2. Obtener el área lateral total A de dicho sólido (se consideran las superficies laterales interior y exterior, pero no la base). Determinar los valores de r en los que A alcanza sus valores extremos.

Solución.

1. Usando el *método de las capas*, el volumen pedido es

$$\text{vol} = 2\pi \int_r^3 x\sqrt{9 - x^2}\, dx = 2\pi \left[-\frac{1}{3} \left(9 - x^2\right)^{3/2} \right]_r^3 = \frac{2\pi}{3} \left(9 - r^2\right)^{3/2}.$$

Usando el *método de los discos* para las funciones $g_1(y) = r$ y $g_2(y) = \sqrt{9 - y^2}$, y teniendo en cuenta que la altura del orificio de radio r es $\sqrt{9 - r^2}$, el volumen pedido es

$$\begin{aligned} \text{vol} &= \pi \int_0^{\sqrt{9-r^2}} \left(9 - y^2 - r^2\right) dy = \pi \left[\left(9 - r^2\right) y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{9-r^2}} \\ &= \pi \left[\left(9 - r^2\right)^{3/2} - \frac{1}{3} \left(9 - r^2\right)^{3/2} \right] = \frac{2\pi}{3} \left(9 - r^2\right)^{3/2}. \end{aligned}$$

2. El área lateral interior A_1 de la superficie generada por $g_1(y) = r$ es

$$A_1 = 2\pi \int_0^{\sqrt{9-r^2}} r\, dy = 2\pi r\sqrt{9 - r^2}.$$

El área lateral exterior A_2 de la superficie generada por $g_2(y) = \sqrt{9 - y^2}$ es

$$A_2 = 2\pi \int_0^{\sqrt{9-r^2}} g_2\sqrt{1 + (g_2')^2}\, dy.$$

Calculamos

$$1 + (g_2')^2 = 1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{9 - y^2}} \right)^2 = 1 + \frac{y^2}{9 - y^2} = \frac{9}{9 - y^2},$$

por lo que $g_2\sqrt{1 + \left(g_2'\right)^2} = 3$, y el área lateral exterior es

$$A_2 = 2\pi \int_0^{\sqrt{9-r^2}} 3\, dy = 6\pi\sqrt{9 - r^2}.$$

Entonces, el área lateral total es

$$A(r) = A_1 + A_2 = 2\pi\sqrt{9-r^2}\,(r+3)\,, \quad 0 \leq r \leq 3.$$

La condición necesaria para los extremos locales es

$$\begin{aligned} A'(r) &= 2\pi\left(\frac{-r}{\sqrt{9-r^2}}\,(r+3)+\sqrt{9-r^2}\right) \\ &= 2\pi\left(\frac{-r\,(r+3)+9-r^2}{\sqrt{9-r^2}}\right) \\ &= 2\pi\left(\frac{-2r^2-3r+9}{\sqrt{9-r^2}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación $2r^2+3r-9=0$, obteniendo

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{-3 \pm 9}{4} = \begin{cases} 3/2, \\ -3. \end{cases}$$

Por tanto, el único extremo local en el interior del intervalo $[0,3]$ es $r = 3/2$ y el valor del área lateral total en dicho extremo es

$$A\left(\frac{3}{2}\right) = 2\pi\sqrt{9-\frac{9}{4}}\left(\frac{3}{2}+3\right) = 2\pi\sqrt{\frac{27}{4}}\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{27\sqrt{3}}{2}\pi.$$

En los puntos terminales del intervalo, el área lateral total es $A(0) = 18\pi$ y $A(3) = 0$. Dado que

$$18\pi < \frac{27\sqrt{3}}{2}\pi \iff 4 < 3\sqrt{3} \iff 16 < 27,$$

concluimos que en $r = 0$ el área lateral total tiene un mínimo absoluto y en $r = 3/2$ tiene un máximo absoluto.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 3 de Julio de 2001

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Calcular el flujo de salida del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left((x-1)^3, (y+1)^3, (z-1)^3\right),$$

a través de la superficie cerrada

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 0\right\}.$$

Solución. Completando cuadrados en la ecuación de S, obtenemos:

$$0 = x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 + (z-1)^2 - 1.$$

Por tanto, la ecuación de la superficie es $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 3$.

El teorema de la divergencia de Gauss afirma que *el flujo de salida de F a través de S coincide con la integral triple de la divergencia de F*, es decir

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div}(F) \; dx\, dy\, dz,$$

donde V es la esfera con centro en el punto $(1,-1,1)$ y radio $\sqrt{3}$. Para calcular la integral triple, usaremos coordenadas esféricas (r,θ,Φ) con centro en $(1,-1,1)$. Las ecuaciones del cambio de coordenadas son

$$x = 1 + r \operatorname{sen}\theta \cos\Phi, \quad y = -1 + r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\Phi, \quad z = 1 + r\cos\theta,$$

donde $0 \le r, \; 0 \le \theta \le \pi, \; 0 \le \Phi \le 2\pi$, y el determinante jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\Phi)} = r^2 \operatorname{sen}\theta.$$

Dado que $\operatorname{div}(F) = 3(x-1)^2 + 3(y+1)^2 + 3(z-1)^2 = 3r^2$, el flujo de salida de F a través de S es

$$\begin{aligned}
\iiint_V \operatorname{div}(F) \; dx\, dy\, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{3}} 3r^2 r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr\, d\theta\, d\Phi \\
&= 3(2\pi) \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta\right) \left(\int_0^{\sqrt{3}} r^4 \, dr\right) \\
&= 6\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= 12\pi \frac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{5} = \frac{108\sqrt{3}}{5}\pi.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Calcular directamente y usando el teorema de Green la integral de línea

$$\oint_C 2\left(x^2+y^2\right)\,dx+(x+y)^2\,dy,$$

donde C es el contorno del triángulo con vértices en los puntos $(1,1)$, $(2,2)$ y $(1,3)$ recorrido en sentido positivo.

Solución. En primer lugar, calculamos directamente la integral de línea

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\int_{C_1} P\,dx+Q\,dy+\int_{C_2} P\,dx+Q\,dy+\int_{C_3} P\,dx+Q\,dy,$$

donde C_1 es el segmento que une los puntos $(1,1)$ y $(2,2)$, C_2 es el segmento que une los puntos $(2,2)$ y $(1,3)$, y C_3 es el segmento que une los puntos $(1,3)$ y $(1,1)$. La recta que contiene a C_1 es $y=x$, la que contiene a C_2 es $y-2=-(x-2)$, es decir $y=4-x$, siendo $x=1$ la recta que contiene a C_3. Parametrizamos C_1 con $(x,y)=(t,t)$, $1\leq t\leq 2$, el segmento C_2 con $(x,y)=(4-t,t)$, $2\leq t\leq 3$, y C_3 con $(x,y)=(1,3-t)$, $0\leq t\leq 2$. A continuación, calculamos las tres integrales de línea

$$\int_{C_1} P\,dx+Q\,dy=\int_1^2\left[2\left(t^2+t^2\right)+(2t)^2\right]dt=\int_1^2 8t^2dt=8\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2=\frac{56}{3}.$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2} P\,dx+Q\,dy&=\int_2^3\left[2\left((4-t)^2+t^2\right)(-1)+4^2\right]dt\\&=\int_2^3\left[(-2)\left(16-8t+2t^2\right)+16\right]dt\\&=\int_2^3\left(-4t^2+16t-16\right)dt=(-4)\int_2^3\left(t^2-4t+4\right)dt\\&=(-4)\int_2^3(t-2)^2\,dt=(-4)\left[\frac{(t-2)^3}{3}\right]_2^3=-\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

$$\int_{C_3} P\,dx+Q\,dy=\int_0^2(4-t)^2(-1)\,dt=\left[\frac{(4-t)^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}-\frac{64}{3}=-\frac{56}{3}.$$

Por tanto, tenemos que

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=-\frac{4}{3}.$$

El teorema de Green asegura que

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

Dado que $Q_x - P_y = 2(x+y) - 4y = 2x - 2y$, tenemos que calcular

$$I = \iint\limits_D (2x - 2y)\ dx\,dy,$$

donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ \ x \leq y \leq 4 - x\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \int_x^{4-x} (2x - 2y)\ dy\,dx = \int_1^2 \left[2xy - y^2\right]_x^{4-x}\ dx \\
&= \int_1^2 \left[2x(4-x) - (4-x)^2 - 2x^2 + x^2\right]\ dx \\
&= \int_1^2 \left(-4x^2 + 16x - 16\right)\ dx = (-4)\int_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right)\ dx \\
&= (-4)\int_1^2 (x-2)^2\ dx = (-4)\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2 \\
&= (-4)\left[-\frac{(-1)^3}{3}\right] = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 8 de Septiembre de 2008

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Calcular el volumen del sólido obtenido al girar, alrededor del eje x, la región acotada por dicho eje y la función $f : [0, e] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & 0 < x \leq e, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Solución. El volumen, usando el método de los discos, es

$$V = \pi \int_0^e (x \ln x)^2 \, dx.$$

El cambio de variable $t = \ln x$ implica $x = e^t$ y $dx = e^t \, dt$, por lo que la integral se transforma en

$$V = \pi \int_{-\infty}^1 \left(e^t t\right)^2 e^t \, dt = \pi \int_{-\infty}^1 t^2 e^{3t} \, dt.$$

Usando integración por partes, con $u = t^2$ y $dv = e^{3t} \, dt$, una primitiva es

$$\int t^2 e^{3t} \, dt = \frac{t^2 e^{3t}}{3} - \frac{2}{3} \int t e^{3t} \, dt.$$

Aplicando de nuevo integración por partes, con $u = t$ y $dv = e^{3t} \, dt$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int t^2 e^{3t} \, dt &= \frac{t^2 e^{3t}}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{t e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} \int e^{3t} \, dt \right) \\ &= \frac{t^2 e^{3t}}{3} - \frac{2 t e^{3t}}{9} + \frac{2 e^{3t}}{27}. \end{aligned}$$

A continuación, calculamos

$$\lim_{t \to -\infty} t^2 e^{3t} = \lim_{t \to -\infty} \frac{t^2}{e^{-3t}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{2t}{-3e^{-3t}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{2}{9e^{-3t}} = 0.$$

Además,

$$\lim_{t \to -\infty} t e^{3t} = 0 \text{ y } \lim_{t \to -\infty} e^{3t} = 0.$$

En consecuencia, el volumen del sólido es

$$V = \pi \left(\frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2e^3}{27} \right) = \frac{5e^3}{27} \pi.$$

Ejercicio 2. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5\,(n+1)} \right)^n x^n,$$

determinar su radio de convergencia, estudiar la convergencia en los extremos y aproximar su suma en $x = -1$ con un error menor que $1\,/500$.

Solución. Para determinar su radio de convergencia, usamos el criterio de la raíz

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{5(n+1)}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\,(n+1)}{n} = 5.$$

Entonces la serie de potencias es absolutamente convergente en el intervalo $(-5, 5)$. Para estudiar la convergencia en los extremos del intervalo, analizamos la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5\,(n+1)} \right)^n 5^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

tenemos que la serie es divergente. Si $x = -5$, la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5\,(n+1)} \right)^n (-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n,$$

también es divergente porque la sucesión de sus términos no converge a cero.

En $x = -1$, la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{5\,(n+1)} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

es alternada porque la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \left(\frac{n}{5\,(n+1)} \right)^n = \frac{1}{5^n} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

es decreciente y converge a cero. Entonces, el error en la aproximación de su suma s con la suma parcial s_N verifica $|s - s_N| \leq a_{N+1}$. Dado que $a_3 > 1\,/500$ y $a_4 = 6.5536 \times 10^{-4} < 1\,/500$, tenemos que la aproximación pedida es

$$s_3 = -a_1 + a_2 - a_3 = -\frac{1}{5\,(1+1)} + \left(\frac{2}{5\,(2+1)} \right)^2 - \left(\frac{3}{5\,(3+1)} \right)^3 = -8.5597 \times 10^{-2}.$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 8 de Septiembre de 2008

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x,y,z) = x^2 + y - z^2,$$

sobre el conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, \ \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solución. Los puntos del conjunto D satisfacen $z = -y$, luego podemos resolver el problema de optimización equivalente definido mediante la función $g(x,y) = x^2 + y - y^2$ sobre el conjunto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

En primer lugar, determinamos los puntos del interior del conjunto E que verifican

$$\nabla g(x,y) = (2x, 1-2y) = (0,0),$$

obteniendo el punto $P_1 = (0, 1/2) \in \operatorname{Int} E$. A continuación, aplicamos el criterio de los multiplicadores de Lagrange, resolviendo el sistema dado por

$$\nabla g(x,y) = \lambda \nabla h(x,y)$$

y la restricción $h(x,y) = x^2 + y^2 = 1$. Las dos primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda x, \\ 1 - 2y &= 2\lambda y, \end{aligned}$$

La primera ecuación implica que $(1-\lambda)x = 0$ por lo que $\lambda = 1$ o bien $x = 0$. Si $\lambda = 1$, usando la segunda ecuación, tenemos que $4y = 1$, luego $x^2 = 1 - 1/16 = 15/16$. Entonces, obtenemos los puntos

$$P_2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{y} \quad P_3 = \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Si $x = 0$ entonces $y^2 = 1$, lo que proporciona dos nuevos puntos

$$P_4 = (0,1) \quad \text{y} \quad P_5 = (0,-1).$$

Los valores de la función g en dichos puntos son

$$g(P_1) = \frac{1}{4}, \ \ g(P_2) = g(P_3) = \frac{9}{8}, \ \ g(P_4) = 0, \ \ g(P_5) = -2,$$

luego el máximo de g se alcanza en P_2 y P_3, mientras que el mínimo de g se alcanza en P_5. En consecuencia, el mínimo absoluto de f se alcanza en el punto $(0,-1,1) \in D$ y es -2, mientras que el máximo absoluto de f es $9/8$, obteniéndose en los puntos

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)\right\} \subset D.$$

Ejercicio 4. Sea S_1 la superficie de ecuación $z = x^2 + 2y^2$ y sea S_2 la superficie de ecuación $z = 4 - x^2$.

(a) Calcular el volumen del sólido Q acotado por las dos superficies.

(b) Calcular el flujo de salida del campo vectorial $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la frontera de Q.

(c) Calcular la integral de línea $\oint_C F \cdot dr$, siendo C la curva intersección de las superficies S_1 y S_2.

Solución.
(a) Dado que el sólido está acotado por S_1 y S_2, para cualquier $(x,y,z) \in Q$ se verifican las desigualdades $x^2 + 2y^2 \leq z \leq 4 - x^2$, que implican

$$x^2 + 2y^2 \leq 4 - x^2 \iff x^2 + y^2 \leq 2.$$

Entonces, la descripción del sólido como xy-proyectable es

$$Q = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, \;\; x^2 + 2y^2 \leq z \leq 4 - x^2\right\}.$$

El volumen de Q es

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(Q) &= \iiint_Q dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\leq 2} \left(\int_{x^2+2y^2}^{4-x^2} dz\right) dx\,dy \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 2} \left(4 - 2x^2 - 2y^2\right) dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(4 - 2r^2\right) r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} 2\,d\theta = 4\pi,
\end{aligned}$$

usando el cambio a coordenadas polares.
(b) El teorema de la divergencia de Gauss implica que el flujo de salida a través de la frontera de Q verifica

$$\iint_{\operatorname{Fr}(Q)} F \cdot N\,dS = \iiint_Q \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz = \iiint_Q 3\,dx\,dy\,dz = 12\pi,$$

usando el resultado obtenido en el apartado (a).
(c) Observemos que la curva C es la frontera de la superficie

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, \;\; z = 4 - x^2\right\}.$$

El teorema de Stokes asegura que

$$\oint_C F.\,dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot N\,dS = \iint_S (0,0,0) \cdot N\,dS = 0.$$

Nota: El campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ tiene primeras derivadas parciales continuas y es conservativo en $\mathbb{R}^3$, con potencial $f(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$. Entonces, la integral de línea $\oint_C F \cdot dr = 0$.

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen Final. 1 de Julio de 2009
PRIMERA PARTE

Ejercicio 1.

(a) Dibujar un rectángulo inscrito en el semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$, con uno de sus lados en el eje x.

(b) Calcular las dimensiones y el área del rectángulo del tipo descrito en (a) que tiene área máxima.

Solución. Los vértices de un rectángulo de este tipo son

$$(\pm x, 0), \quad \left(\pm x, \sqrt{25 - x^2}\right), \quad 0 < x < 5.$$

Entonces, el área del rectángulo es

$$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2},$$

donde $0 < x < 5$. Los puntos críticos del área se obtienen resolviendo la ecuación $A'(x) = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} A'(x) &= 2\left(\sqrt{25 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{25 - x^2}}\right) \\ &= 2\left(\frac{25 - 2x^2}{\sqrt{25 - x^2}}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$25 - 2x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{25}{2} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Dado que $x \in (0, 5)$ el único punto crítico es $x^* = 5/\sqrt{2}$. Si $x \in \left(0, 5/\sqrt{2}\right)$ entonces $x^2 < 25/2$, luego $25 - 2x^2 > 0$, y la función área es creciente en el intervalo $\left(0, 5/\sqrt{2}\right)$. Si $x \in \left(5/\sqrt{2}, 5\right)$ tenemos que $x^2 > 25/2$, por lo que $25 - 2x^2 < 0$, y la función área es decreciente en el intervalo $\left(5/\sqrt{2}, 5\right)$. En consecuencia, el área máxima se alcanza en $x^* = 5/\sqrt{2}$. Las dimensiones y el área del rectángulo de área máxima son:

$$\mathit{base} = 2x^* = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}, \quad \mathit{altura} = y^* = \sqrt{25 - \frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}, \qquad A^* = 25.$$

Ejercicio 2. Determinar la convergencia o divergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$$

Solución.
En primer lugar, analizamos la convergencia de la integral impropia

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$$

Para aplicar el criterio de comparación por paso al límite, calculamos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1,$$

lo que implica

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 1.$$

Dado que la integral $\int_0^1 x^\alpha\, dx$ converge si y sólo si $\alpha > -1$, tenemos que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

es convergente. Entonces, la integral I_1 es convergente.

Para estudiar la convergencia de la integral impropia

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}\, dx,$$

calculamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{e^x-1}} = 0.$$

Dado que la integral $\int_1^\infty x^\alpha\, dx$ converge si y sólo si $\alpha < -1$, usando $\alpha = -2$, obtenemos que la integral I_2 es convergente. Como ambas integrales son convergentes, concluimos que la integral es convergente.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 1 de Julio de 2009

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Dada la integral iterada

$$\int_0^1 \int_1^{\sqrt{2-y^2}} \frac{x}{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

(a) Dibujar la región de integración.

(b) Transformar la integral a coordenadas polares.

(c) Calcular dicha integral.

Solución.
(a) La región de integración es la porción del semicírculo $x^2+y^2 \leq 2$, $y \geq 0$, situada a la derecha de la recta $x=1$, es decir con $x \geq 1$.

(b) Transformando a coordenadas polares, tenemos que $r \leq \sqrt{2}$ y $r\cos\theta \geq 1$, por lo que

$$\frac{1}{\cos\theta} \leq r \leq \sqrt{2}.$$

La intersección de la recta $x=1$ con la semicircunferencia $x^2+y^2=2$, $y \geq 0$, es el punto $(1,1)$, por lo que el ángulo $0 \leq \theta \leq \pi/4$. Además

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Entonces la integral en coordenadas polares es

$$\int_0^{\pi/4} \int_{1/\cos\theta}^{\sqrt{2}} \frac{\cos\theta}{r}\, r\, dr\, d\theta.$$

(c) Calculamos la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \int_{1/\cos\theta}^{\sqrt{2}} \cos\theta\, dr\, d\theta &= \int_0^{\pi/4} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\cos\theta}\right) \cos\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \left(\sqrt{2}\cos\theta - 1\right) d\theta \\
&= \left[\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta - \theta\right]_0^{\pi/4} \\
&= 1 - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Sea S la porción del elipsoide $x^2+y^2+3z^2=1$, situada encima del plano $z=0$ y sea $F(x,y,z)=\left(x+y^3, 2y-e^z, -3z-1\right)$. Calcular el flujo de F a través de S en la dirección exterior al elipsoide.

Solución. Si consideramos el sólido Q cuyas fronteras son S y la superficie T, definida por $x^2+y^2\leq 1,\ z=0$, el teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint\limits_{S\cup T} F\cdot N\,dS=\iiint\limits_{Q} \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz.$$

Calculamos la divergencia del campo vectorial

$$\operatorname{div} F=P_x+Q_y+R_z=1+2-3=0$$

Entonces el flujo exterior de F a través de S verifica

$$\iint\limits_{S} F\cdot N\,dS=-\iint\limits_{T} F\cdot N\ dS.$$

Si definimos la parametrización $T(x,y)=(x,y,0)$ donde $x^2+y^2\leq 1$, el vector normal con orientación exterior es $N=(0,0,-1)$. En consecuencia,

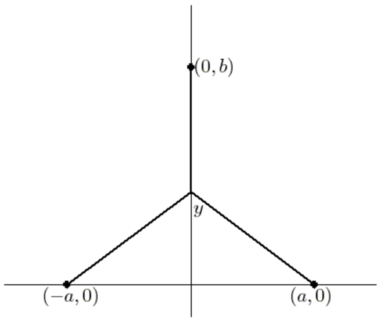
$$\begin{aligned}\iint\limits_{S} F\cdot N\,dS &= -\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\left(x+y^3, 2y-1, -1\right)\cdot(0,0,-1)\ dx\,dy\\ &= -\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} dx\,dy\\ &= -\pi.\end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 26 de Enero de 2009

Ejercicio 1. Dos fábricas se localizan en las coordenadas $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ con suministro eléctrico ubicado en $(0, b)$. Determinar el punto $(0, y)$ de manera tal que longitud total de la línea de transmisión eléctrica desde el suministro eléctrico hasta las fábricas sea un mínimo.



Solución. La longitud total de la línea de transmisión eléctrica $L(y)$ es

$$L(y) = b - y + 2\sqrt{a^2 + y^2}$$

Debemos calcular el mínimo de esta función cuando $y \in [0, b]$. Los puntos críticos de esta función son la soluciones de $L'(y) = 0$ en el intervalo $(0, b)$. Resolvemos la ecuación

$$L'(y) = -1 + \frac{2y}{\sqrt{a^2 + y^2}} = 0 \;\Rightarrow\; 2y = \sqrt{a^2 + y^2} \;\Rightarrow\; 3y^2 = a^2,$$

siendo $y = a \big/ \sqrt{3}$ la única solución en el intervalo $(0, b)$. Observemos que $L'(y) < 0$ si $y < a \big/ \sqrt{3}$ y que $L'(y) > 0$ si $y > a \big/ \sqrt{3}$, luego la función es decreciente en el intervalo $\big(0, a \big/ \sqrt{3}\big)$ y creciente en el intervalo $\big(a \big/ \sqrt{3}\,, \infty\big)$. Ahora, distinguiremos dos casos:

1. Si el punto crítico $a \big/ \sqrt{3} < b$, entonces, por el razonamiento anterior, el mínimo se alcanza en el punto $\big(0, a \big/ \sqrt{3}\big)$.

2. Si $b \leq a \big/ \sqrt{3}$, la función $L(y)$ no tiene puntos críticos en el intervalo $(0, b)$. Como la función es decreciente en el intervalo $\big(0, a \big/ \sqrt{3}\big)$, en particular lo será en el el intervalo $[0, b]$ y el mínimo se alcanza en el punto $(0, b)$.

Ejercicio 2. La base de un sólido es un círculo de radio r y sus secciones transversales verticales son triángulos equiláteros. Sabiendo que el volumen del sólido es 10 metros cúbicos, encontrar el radio del círculo.

Solución. Un triángulo equilátero de lado l tiene altura

$$h = l \operatorname{sen}(\pi/3) = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces, su área es

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Como la base del sólido es un círculo de radio r, suponemos que su centro es el origen del sistema de referencia. En este caso el borde del círculo es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Entonces, la sección transversal es un triángulo equilátero de lado $l(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, donde $x \in [-r, r]$, siendo el área de la sección transversal vertical

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2}{4} = \sqrt{3}\left(r^2 - x^2\right).$$

Para calcular el volumen, sólo tenemos que integrar las secciones transversales entre $-r$ y r.

$$V = \int_{-r}^{r} \sqrt{3}\left(r^2 - x^2\right) dx = \sqrt{3}\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4r^3}{\sqrt{3}}.$$

Dado que el volumen del sólido es $V = 10$, resolvemos la ecuación

$$\frac{4r^3}{\sqrt{3}} = 10,$$

obteniendo

$$r = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{3}}{2}}.$$

Ejercicio 3.
(i) Calcular la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \ln(1-x^2)$, así como su dominio de convergencia.
(ii) Dada la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}$, estudiar su carácter y calcular su suma.

Solución. (i) La derivada de la función $f(x) = \ln(1-x^2)$ es

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2},$$

y sabemos que el desarrollo en serie de Maclaurin de la función

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad x \in (-1,1).$$

Entonces, el desarrollo en serie de Maclaurin de la derivada

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} = -2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}, \quad x \in (-1,1).$$

Integrando, obtenemos

$$f(x) = \ln(1-x^2) = C - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2},$$

cuyo dominio de convergencia es, al menos, el intervalo $(-1,1)$. En particular, para $x=0$, obtenemos $C=0$. En los puntos terminales $x=-1$ y $x=1$, se obtiene la serie $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, que es divergente por ser la opuesta de la serie armónica. Por lo tanto, la serie de Maclaurin pedida es

$$f(x) = \ln(1-x^2) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1}, \quad x \in (-1,1).$$

(ii) Aplicando el criterio del cociente a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}$, obtenemos

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+2)\,3^{n+2}}}{\dfrac{1}{(n+1)\,3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3\,(n+2)} = \frac{1}{3} < 1,$$

por lo que la serie es convergente. Usando el apartado (i), concluimos que su suma es

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,3^{n+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{3}\right)^{2n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2}}{(n+1)} \\ &= -\ln(1-\frac{1}{3}) = -\ln(\frac{2}{3}) = \ln(\frac{3}{2}).\end{aligned}$$

Escuela Superior de Ingenieros

Ingeniero de Telecomunicación

CÁLCULO

Relación complementaria de problemas

Curso 2009-2010

Matemática Aplicada II

Universidad de Sevilla

Índice general

Capítulo 1

Aplicaciones de la derivada

1.1. Problemas de optimización

P 1.1 *(Primer parcial 2000)* Se considera la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Determinar, de entre los triángulos isósceles inscritos en dicha elipse, con un vértice en el punto $(0, b)$ y base paralela al eje OX, el que tenga área máxima.

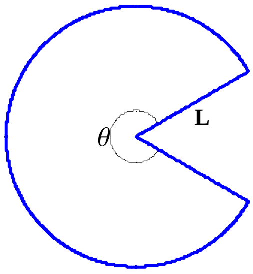
P 1.2 *(Julio 2000)* Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right), & si\ \ x \neq 0, \\ 0, & si\ \ x = 0. \end{cases}$$

(a) Obtener las funciones derivadas f' y f'', junto con sus respectivos dominios. (b) Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de f, en $x = 0$ y $x = 1/2$. (c) Calcular los polinomios de Taylor de orden 2 de f, centrados en $x = 0$ y $x = 1/2$, cuando existan. Estudiar si f alcanza un extremo en $x = 1/2$ y, en ese caso, clasificarlo.

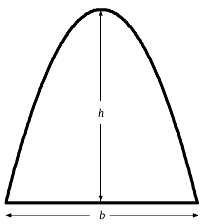
P 1.3 *(Septiembre 2000)* Se dispone de 20 metros de alambre para delimitar un triángulo equilátero, un cuadrado, o bien ambas figuras. Cuanta cantidad de alambre debe dedicarse a construir el triángulo y cuanta a construir el cuadrado si se pretende que la figura o figuras construidas encierren el área máxima posible.

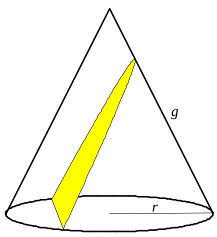
P 1.4 *(Primer parcial 01)* Al pegar los bordes rectos de un sector circular de radio L y ángulo central θ (veáse figura) se forma la superficie lateral de un cono. Encontrar el valor de θ para el cual el volumen de dicho cono resulta máximo.



P 1.5 *(Septiembre 02)* Un canal abierto cuya sección es un trapecio isósceles de bases horizontales, tiene sus paredes laterales formando un angulo agudo dado a con la base menor del fondo. Conociendo el área A de dicha sección, hallar la profundidad h del canal para la cual la suma de longitudes de la base y paredes laterales es mínima.

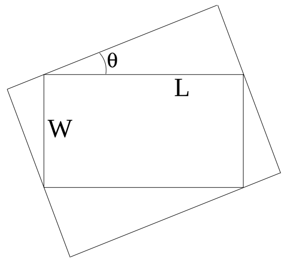
P 1.6 *(Primer parcial 03)* Deducir la fórmula del área de un segmento parabólico en función de su base y su altura. Se considera un cono circular recto con radio de la base r y generatrices de longitud g. Al cortarlo por un plano paralelo a una de dichas generatrices se obtiene como intersección un segmento parabólico. Calcular el área máxima de los segmentos parabólicos obtenidos por este procedimiento.



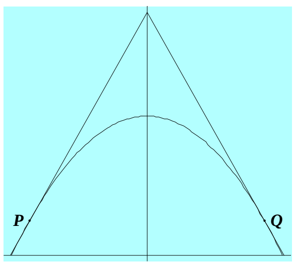


P 1.7 *(Julio 03)* Analizar la concavidad y convexidad, obtener los puntos de inflexión y esbozar la gráfica de $y = e^{-x^2}$. Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene su base en el eje OX y dos vértices en la gráfica de $y = e^{-x^2}$.

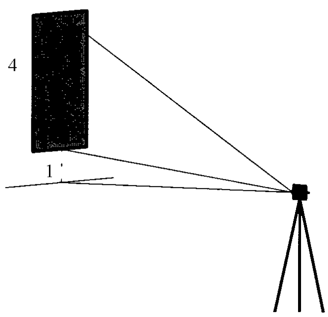
P 1.8 *(Primer parcial 04)* Calcular el área máxima del rectángulo que se puede circunscribir alrededor de un rectángulo dado de longitud L y anchura W.



P 1.9 *(Septiembre 04)* Calcular las coordenadas de los puntos P y Q de la parábola $y = 1 - x^2$, tales que el triángulo determinado por el eje x y las rectas tangentes a la parábola en P y Q sea equilátero.



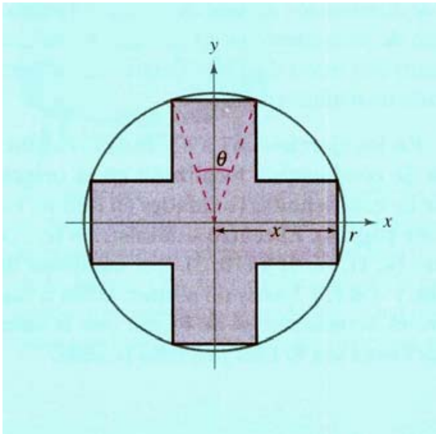
P 1.10 *(Primer parcial 05)* Se desea fotografiar un cuadro de 4 m. de altura colgado en una pared de una galería de arte. La lente de la cámara está situada 1 m. por debajo del extremo inferior del cuadro. ¿A qué distancia de la pared ha de colocarse la cámara para que el ángulo que subtiende (o abarca) el cuadro sea máximo?



P 1.11 *(Julio 05)* Encontrar el área mínima de la región del primer cuadrante del plano cuyas fronteras están contenidas en la recta que pasa por el punto $(3, 5)$ y las rectas $x = 0$, $y = 0$.

P 1.12 *(Septiembre 05)* Un espejo plano de dimensiones 80 cm y 90 cm, se rompe por una esquina según una recta. De los dos trozos que quedan, el menor es un triángulo de catetos 10 cm y 12 cm, correspondientes a las dimensiones menor y mayor del espejo respectivamente. Hallar el área máxima del espejo rectangular que se puede obtener con el trozo mayor.

P 1.13 *(Primer parcial 06)* Determinar el área máxima de una cruz simétrica inscrita en un círculo de radio r (ver la figura).



P 1.14 *(Julio 06)* Determinar el máximo absoluto de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

P 1.15 *(Septiembre 06)* A medianoche, el barco *Arrow* se encuentra situado a 100 kilómetros en dirección este del barco *Blue*. El barco *Arrow* navega hacia el oeste a 12 km/h, y el barco *Blue* lo hace hacia el sur a 10 km/h. ¿A qué hora se encontrarán a distancia mínima uno del otro? ¿Cúal es la distancia mínima?

P 1.16 *(Primer parcial 07)* Se consideran las rectas que pasan por el punto $(1, 8)$ y cortan a los semiejes positivos. Determinar la distancia mínima entre los puntos de corte y obtener la recta que verifica dicha propiedad.

P 1.17 *(Junio 07)* Determinar los puntos de máxima y mínima pendiente de la gráfica de la función

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

P 1.18 *(Primer parcial 08)* Sea $P = \left(a, a^2\right)$ con $a > 0$ un punto cualquiera de la gráfica de la parábola $y = x^2$ situado en el semiplano $x > 0$. (i) Demostrar que la intersección de la parábola con su recta normal en P es el punto

$$Q = \left(-a - \frac{1}{2a}, \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2\right).$$

(ii) Encontrar el valor de a que minimiza la distancia entre P y Q, razonando la respuesta.

P 1.19 *(Junio 08)* Consideremos los rectángulos de lados paralelos a los ejes que pueden inscribirse en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

Calcular las dimensiones y el área del rectángulo que tiene área máxima.

1.2. El método de Newton

P 1.20 *(Primer parcial 97)* Resolver la ecuación $x^3 - 2 = 0$. Es decir, hallar una aproximación de $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Para ello, comprobar que aplicando el método de Newton a la ecuación $x^3 - 2 = 0$ se obtiene la función de iteración

$$g(x) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x^2}\right).$$

Representar esquemáticamente la función $g(x)$ en el intervalo $[1, +\infty)$.

P 1.21 *(Diciembre 98)* Consideremos la circunferencia C, intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $x = h$, con $0 < h < 1$. Construimos el cono circular recto cuyo eje es OX, se apoya en la circunferencia C y es tangente en ella a la esfera. Comprobar que el volumen $V(h)$ del trozo del cono entre su vértice y el plano $x = h$ es

$$V(h) = \frac{\pi(1 - h^2)^2}{3h}.$$

Probar que existe un único valor $h \in (0, 1)$ tal que $V(h)$ coincide con el volumen de la esfera. Calcular dicho valor con tres cifras decimales de precisión usando el método de Newton. Justificar la elección del punto inicial.

P 1.22 *(Primer parcial 99)* Se considera la función $f(x) = e^{-x} - x$. Demostrar que la función se anula en un único punto de la recta real y que éste pertenece al intervalo $[0, 1]$. Calcular para $f(x)$ el polinomio de Taylor en 0 de orden 2, $T_2(x)$, y resolver la ecuación $T_2(x) = 0$. Obtener el cero de $f(x)$ mediante el método de Newton, utilizando como valores iniciales las raíces de la ecuación del apartado anterior. Comparar las iteraciones y justificar los resultados obtenidos.

P 1.23 *(Julio 99)* Se desea resolver la ecuación $f(x) = e^x + x - 2 = 0$. Demostrar que la función $f(x)$ se anula en un único punto de la recta real y que éste pertenece al intervalo $[0, 1]$. Calcular para $f(x)$ el polinomio de Taylor en 0 de orden 2, $M_2(x)$ y resolver la ecuación $M_2(x) = 0$. Obtener el cero de $f(x)$ mediante el método de Newton, utilizando como valor inicial una de las raíces de la ecuación del apartado anterior.

P 1.24 *(Septiembre 99)* Se considera la función $f(x) = \operatorname{sh} x + x - 1$. Demostrar que la función $f(x)$ se anula en un solo punto de la recta real y que éste pertenece al intervalo $[0, 1]$. Calcular para $f(x)$ el polinomio de Taylor en 0 de orden 2, $M_2(x)$ y resolver la ecuación $M_2(x) = 0$. Aproximar el cero de $f(x)$ mediante tres iteraciones del método de Newton, utilizando los resultados del apartado anterior como valor inicial.

P 1.25 *(Primer parcial 2000)* Se desea calcular un punto crítico de la función $x \cos x$. Aplicar el método de Newton a la función adecuada para obtener, partiendo de $x_0 = 1$, dos cifras decimales del punto crítico buscado. Explicar todos los pasos realizados.

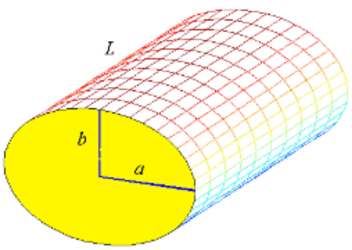
Capítulo 2

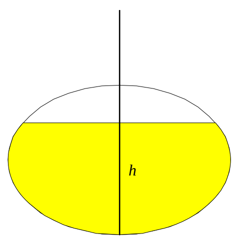
Aplicaciones de la integral

2.1. Integración

P 2.1 *(Septiembre 01)* Dadas las rectas $y = x$, $y = ax$, $y = 1 - ax$, con $a \geq 1$, se pide: Determinar, en función de a, el área de la región limitada por las tres rectas. Calcular los valores de $a \in [1, \infty)$ que hacen el área máxima o mínima. Sea $F : \left[0, \dfrac{1}{a+1}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ la función que asigna a cada número $z \in \left[0, \dfrac{1}{a+1}\right]$ el área $F(z)$ del trozo de la región del apartado anterior comprendido entre las rectas $x = 0$ y $x = z$. Justificar la existencia de $F'(z)$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{1}{a+1}\right]$. Calcular $F'(z)$. ¿Es derivable la función $F'(z)$ en todos los puntos de su dominio?

P 2.2 *(Junio 04)* Un depósito subterráneo de gasolina tiene forma de cilindro elíptico, con semieje horizontal a, semieje vertical b y anchura L. Para medir su contenido se sumerge una vara hasta la parte inferior del depósito y se mide la altura h del nivel de gasolina. Calcular el volumen de la gasolina que contiene el depósito en función de h.





2.2. Integración numérica

P 2.3 *(Septiembre 93)* Determinando previamente el número de subintervalos para que el error sea menor que 10^{-3}, calcular aproximadamente la integral

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx,$$

con la regla compuesta del trapecio.

P 2.4 *(Primer parcial 94)* Aplicar la regla compuesta del trapecio, dividiendo el intervalo de integración en 4 y 8 partes iguales, para calcular valores aproximados de la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}\right)\, dx.$$

En cada caso, dar una cota del error cometido.

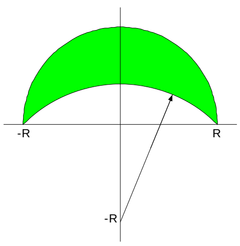
P 2.5 *(Julio 2000)* Calcular, con un error menor que 0,01, un valor aproximado de la integral

$$I = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \operatorname{sen} x^2\, dx,$$

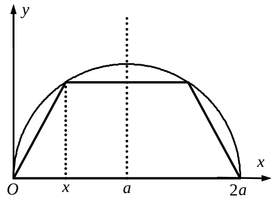
utilizando la regla de Simpson.

2.3. Volúmenes de revolución

P 2.6 *(Julio 99)* Hallar el área de la luna dada en la figura. Calcular el volumen del sólido resultante al girar la luna alrededor del eje OX.



P 2.7 *(Primer parcial 99)* Calcular las dimensiones del trapecio isósceles de área máxima inscrito en la semicircunferencia de la figura. Para dicho trapecio de área máxima, calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar el trapecio alrededor del eje vertical que pasa por O.



P 2.8 *(Primer parcial 01)* Sea un sólido generado haciendo girar la región acotada por la curva $y = x^2/2$, y la recta $y = 2$, alrededor del eje OY. Se desea perforar un orificio circular, centrado en el eje de revolución, de manera tal que dicho sólido pierda un cuarto de su volumen. Calcular el diámetro que debe tener dicho orificio.

P 2.9 *(Julio 02)* Se considera el recinto plano

$$R := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3,\ \ 0 \leq y \leq \frac{x^3}{3}\right\}.$$

Obtener los volúmenes de los sólidos de revolución V_1, obtenido al girar dicho recinto R alrededor del eje OX, y V_2, obtenido al girar R alrededor de la recta $x = a$, con $a > 3$.

P 2.10 *(Primer parcial 04)* Sea R la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = 2x - x^2$ y $y = x^3$. Calcular

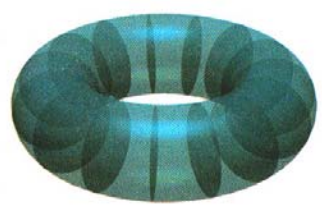
1. el área de R,
2. el volumen que se obtiene al hacer girar R en torno al eje x,
3. el volumen que se obtiene al hacer girar R en torno al eje y.

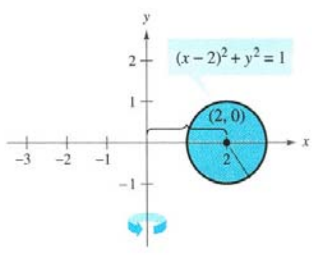
P 2.11 *(Primer parcial 05)* Calcular los volúmenes de los sólidos que se obtienen al hacer girar la región limitada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$, en torno al eje x, al eje y, y a la recta $y = 2$.

P 2.12 *(Primer parcial 07)* Un toro se forma al girar la región contenida en la circunferencia

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1,$$

alrededor del eje y. Calcular el volumen de este sólido de revolución, usando el método de las arandelas y el método de las capas.


Toro



P 2.13 *(Junio 07)* Sea R la región plana limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}, \quad x \geq 0,$$

el eje OX y el eje OY. Consideramos los sólidos que se obtienen cuando la región R gira en torno al eje OX y al eje OY. Calcular el volumen de dichos sólidos.

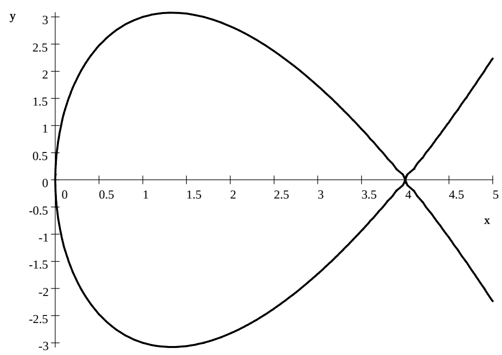
P 2.14 *(Septiembre 07)* La gráfica de la función

$$y = 4 - \frac{x^2}{4}$$

en el intervalo $[0, 4]$ gira alrededor de la recta $y = b$, donde $b \in [0, 4]$. Calcular el volumen del sólido resultante en función de b. Hallar el valor de b que hace mínimo el volumen de dicho sólido.

P 2.15 *(Primer parcial 08)* Sea D la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x. (i) Encontrar la pendiente de la recta $y = mx$ que divide la región D en dos regiones de igual área. (ii) Calcular el volumen del sólido generado por la región acotada por la parábola y la recta obtenida en (i), al girar alrededor del eje y.

P 2.16 *(Junio 07)* Sea R la región plana limitada por el lazo de la curva definida por la ecuación $y^2 = x(4-x)^2$. Calcular los volúmenes de los sólidos que se obtienen cuando la región R gira alrededor del eje x, del eje y, y de la recta $x = 4$.



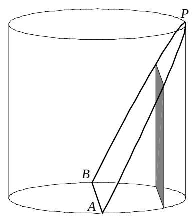
P 2.17 *(Septiembre 08)* Calcular el volumen del sólido obtenido al girar, alrededor del eje x, la región acotada por dicho eje y la función $f : [0, e] \to R$, definida por

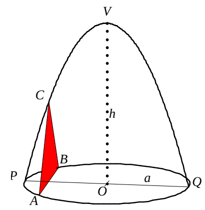
$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & 0 < x \leq e, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

2.4. Volúmenes por secciones

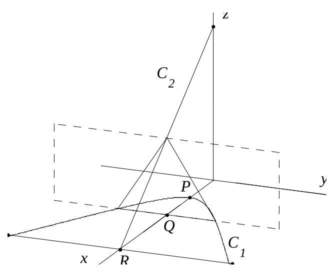
P 2.18 *(Julio 95)* En un círculo de radio a se toma un diámetro POQ; sobre la perpendicular al círculo en el punto O y a una altura h se encuentra el punto V. Consideremos la parábola con vértice en el punto V y que pasa por P y Q. Sea el triángulo de vértices A, B, C, donde A y B están sobre el círculo y C sobre la parábola, todos ellos en un plano perpendicular al diámetro POQ; el sólido se genera al mover el triángulo ABC desde P hasta Q. Calcular el volumen de dicho sólido.

P 2.19 *(Primer parcial 96)* Se considera un cilindro recto de base circular de radio R y altura h. Se corta dicho cilindro por un plano que pasa por un diámetro AB de la base y es tangente a la tapa superior en un punto P. Consideramos la porción de cilindro por debajo de dicho plano. Si cortamos por planos perpendiculares a la base y paralelos al diámetro AB se obtienen secciones rectangulares. Calcular el área máxima de dichas secciones. Calcular el volumen de dicho sólido.





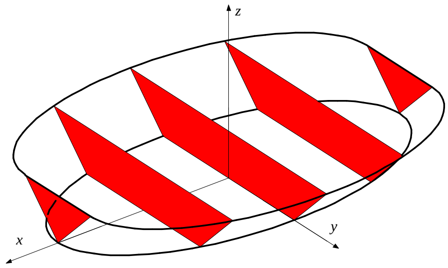
P 2.20 *(Primer parcial 97)* Consideremos, para $b > a > 0$, la rama superior de la hipérbola $C_1 \equiv \{x^2 - y^2 = a^2,\ z = 0,\ x > 0\}$ y el segmento de recta $C_2 \equiv \{x + z = b,\ y = 0\}$ con $x \geq 0$ y $z \geq 0$. Sea P el corte de C_1 con $y = 0$, y sea R la intersección de C_2 con $z = 0$. Para cada punto Q del segmento PR consideramos el plano paralelo a $x = 0$ que pasa por Q y construimos el triángulo cuyos vértices son las intersecciones de C_1 y C_2 con dicho plano (ver figura). Calcular los valores máximo y mínimo de las áreas de dichos triángulos. Hallar el volumen del cuerpo generado por los triángulos anteriores.

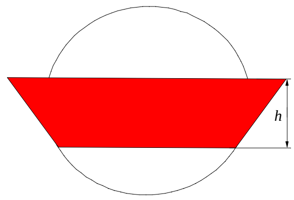


P 2.21 *(Julio 98)* Calcular el volumen total del sólido de la siguiente figura. La base está delimitada por una elipse, cuya ecuación es

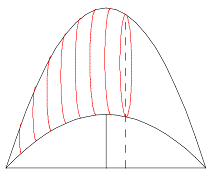
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

con $a > b > 0$. Las secciones perpendiculares al eje OX consisten en trapecios invertidos de altura fija $h > 0$, apoyados en la elipse y tal que los lados opuestos no paralelos forman un ángulo de $45°$ con cada uno de los otros dos.

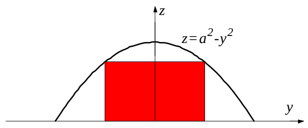


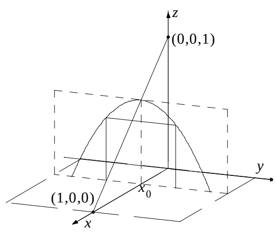


P 2.22 *(Primer parcial 99)* Para cada punto de abscisa $x \in [-1, 1]$ se toma el segmento vertical comprendido entre las parábolas de ecuaciones $y = 1 - x^2$, $y = 3(1 - x^2)$. Ahora usamos cada uno de esos segmentos como el diámetro de un círculo que es perpendicular al eje OX. Estos círculos engendran un cuerpo parecido a un boomerang o a un croissant (ver figura). Determinar su volumen.



P 2.23 *(Julio 2000)* Entre todos los rectángulos del plano YOZ, inscritos en la parábola $z = a^2 - y^2$ (siendo $a > 0$) y con base en el eje OY, calcular el que tiene área máxima. Justificar la respuesta. Para cada valor $x_0 \in [0, 1]$, consideremos la parábola del tipo anterior contenida en el plano $x = x_0$ y cuyo vértice está en el segmento que une los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Construimos el sólido cuya sección con cada plano $x = x_0$ es el rectángulo de área máxima inscrito en la parábola considerada en dicho plano. Calcular el volumen de dicho sólido.





2.5. Longitud de arco y área de una superficie de revolución

P 2.24 *(Septiembre 99)* Sea R la región plana acotada limitada por la curva C de ecuación $3y = x^3$ y las rectas $y = 0$, $x = 3$. Calcular el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje OX y el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor de $x = a$, donde $a \geq 3$. Calcular el área de la superficie de revolución S, obtenida al girar C alrededor del eje OX.

P 2.25 *(Primer parcial 2000)* Se perfora una esfera de radio r con un agujero cilíndrico de modo que el anillo esférico resultante tiene altura h. Probar que el volumen del anillo es $V = \pi h^3/6$. Calcular la superficie total del anillo.

P 2.26 *(Primer parcial 01)* Sean A y B los puntos donde se cortan las curvas $y^2 = 2x^3$, $x^2+y^2 = 20$. Calcular la longitud de la curva cerrada $OABO$ formada con los correspondientes trozos de las curvas anteriores, siendo O el origen de coordenadas.

P 2.27 *(Julio 01)* Un sólido se genera haciendo girar la región acotada por $y = 0$ e $y = \sqrt{9-x^2}$ alrededor del eje y. Se perfora un orificio cilíndrico circular de radio r, centrado en el eje de revolución.

1. Obtener el volumen del sólido resultante.
2. Obtener el área lateral total A de dicho sólido (se consideran las superficies laterales interior y exterior, pero no la base). Determinar los valores de r en los que A alcanza sus valores extremos.

P 2.28 *(Primer parcial 03)* La curva $y = x^k$, $0 \le x \le 1$, donde $k > 0$, divide el cuadrado formado por los ejes coordenados y las rectas $x = 1$, $y = 1$, en dos regiones R_1 (la superior) y R_2 (la inferior). Obtener por el método de los discos, el volumen V_1 del sólido generado al girar la región R_1 en torno al eje y. Obtener por el método de las capas (o de los tubos), el volumen V_2 del sólido generado al girar la región R_2 en torno al eje y. En el caso $k = 2$, obtener el área de la superficie generada al girar la curva dada en torno al eje y y la longitud de dicha curva.

P 2.29 *(Septiembre 03)* Una vasija que tiene la forma de un paraboloide de revolución de eje vertical obtenido al girar la curva $y = px^2$ en torno al eje OY, se encuentra parcialmente llena de agua. Calcular el cociente entre el área de la superficie mojada de la vasija y el volumen de líquido cuando la superficie superior del agua es un círculo de radio R.

P 2.30 *(Primer parcial 06)* Una esfera de radio r se corta por un plano formando un casquete esférico de altura h. Calcular el volumen y la superficie (incluyendo la base) de este sólido de revolución.

2.6. Integrales impropias

P 2.31 *(Julio 96)* Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \operatorname{sen} x}.$$

Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^1 \left(\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\alpha} \frac{1}{x^2}\, dx,$$

según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

P 2.32 *(Septiembre 96)* Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx,$$

para valores no negativos de α.

P 2.33 *(Primer parcial 97)* Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(x+1)}$$

es convergente y calcular la integral para $\alpha = 1/3$.

P 2.34 *(Febrero 98)* Enunciar el criterio de comparación por paso al límite para integrales impropias. Calcular

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\log\left(\frac{1}{x} - x\right)$$

y estudiar la convergencia de la integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{x} - x\right)\,dx.$$

P 2.35 *(Julio 99)* Para la integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2} + x + x^{1/2} + 1}$$

demostrar, sin calcular la integral, que es convergente y, posteriormente, calcular su valor.

P 2.36 *(Primer parcial 99)* Sean m y $n-1$ enteros positivos. Definimos la integral impropia

$$I_{m,n} = \int_0^\infty \frac{x^m}{(1+x)^{m+n}}\,dx.$$

¿Es convergente $I_{m,n}$? Probar que, en ese caso, $(m+n-1)I_{m,n} = mI_{m-1,n}$. Deducir que

$$I_{m,n} = \frac{m!(n-2)!}{(m+n-1)!}.$$

P 2.37 *(Primer parcial 99)* Calcular la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/2} + x^{3/2}}.$$

Determinar los valores del parámetro $p < 3/2$ para los que es convergente la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p + x^{3/2}}.$$

Determinar los valores de p y q, siendo $p < q$, para los que es convergente la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p + x^q}.$$

P 2.38 *(Primer parcial 2000)* Enunciar el criterio de comparación por paso al límite para integrales impropias. Estudiar la convergencia de la integral

$$I = \int_0^\infty x^k \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}\, dx$$

según los valores de $k \in \mathbb{R}$.

P 2.39 *(Septiembre 2000)* Estudiar la convergencia de

$$I_n = \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}} dx, \quad n \geq 1.$$

Probar que $I_n = \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right) I_{n-1}$, para $n \geq 2$. Calcular I_1, I_2 y I_3.

P 2.40 *(Primer parcial 02)* Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}.$$

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de dicha función.

2. Determinar sus extremos absolutos.

3. Calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ si es convergente.

P 2.41 *(Julio 02)* Calcular la integral

$$\int_b^\infty \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}$$

para los valores de a y b con $a + b > 0$, que la hagan convergente.

P 2.42 *(Septiembre 02)* Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{7x+3}{x^a(1+x^3)}\, dx,$$

según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

P 2.43 *(Septiembre 04)* Calcular el valor de la integral impropia

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n\, dx,$$

donde n es un entero positivo.

P 2.44 *(Julio 05)*

(a) Aproximar el valor de la integral

$$\int_1^2 \frac{x}{x - \operatorname{sen} x}\, dx,$$

mediante la regla de Simpson dividiendo el intervalo en cuatro partes iguales.

(b) Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x - \operatorname{sen} x}\, dx,$$

según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

P 2.45 *(Julio 06)*

(a) Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{1 + x^2}\, dx.$$

(b) Calcular el valor de la integral impropia I usando la sustitución $u = 1/x$.

Capítulo 3

Series

3.1. Series numéricas

P 3.1 Estudiar el carácter de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{2^n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n!}$$

P 3.2 *(Julio 95)* Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n)^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, estudiar para qué valores de α converge absolutamente, converge pero no absolutamente o diverge.

P 3.3 *(Segundo parcial 96)* Estudiar, en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$, la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+an}{a+n}\right)^{n^2}$.

P 3.4 *(Diciembre 98)* Enunciar el criterio integral de convergencia de series. Determinar, según los valores de $p \in \mathbb{R}$, la convergencia de la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^p}.$$

Determinar, según los valores de $p \in \mathbb{R}$, la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(\log n)^p}.$$

P 3.5 *(Septiembre 05)* Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$.

(a) Dibujar un esquema de la gráfica de f y obtener la sucesión $(x_k)_{k \geq 0}$ de ceros de f en $[0, \infty)$.

(b) Calcular el área A_k de la región comprendida entre la gráfica de f en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ y el eje x.

(c) Probar que la sucesión $(A_k)_{k\geq 0}$ es una progresión geométrica cuya razón es menor que 1.

(d) Hallar la suma de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$.

P 3.6 *(Primer parcial 06)* Supongamos que las dos series de términos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n),$$

son convergentes. Estudiar el carácter de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n},$$

razonando las respuestas.

P 3.7 *(Septiembre 06)* Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n}.$$

P 3.8 *(Septiembre 07)* Dada la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,2^{2n+1}},$$

estudiar su carácter y calcular su suma usando una función conocida.

3.2. Series de potencias

P 3.9 *(Septiembre 96)* Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(2x+3)^n$, encontrar los valores de x para los cuales la serie converge. Para dichos valores de x, hallar la suma de la serie.

P 3.10 *(Septiembre 98)* Dada la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) x^n$, obtener el radio de convergencia y estudiar el comportamiento en los extremos del intervalo de convergencia. Calcular la suma para $x = 1$, escribiendo la serie numérica resultante como una serie telescópica.

P 3.11 *(Diciembre 99)* Probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}(x+1)^n = e^{x+1}(2+x),$$

determinando previamente para qué valores de x converge la serie de potencias.

P 3.12 *(Julio 2000)* Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1} - n\right) x^n.$$

Calcular su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su suma en dicho dominio.

P 3.13 *(Septiembre 2000)* Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n\,,$$

determinar su radio de convergencia. Estudiar la convergencia en los extremos. Hallar su suma.

P 3.14 *(Septiembre 01)* Se considera la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(n+1)\,2^n}-\frac{n}{3^n}\right)x^n.$$

Obtener su dominio de convergencia y su suma en dicho dominio.

P 3.15 *(Primer parcial 02)* Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\,(x-2)^n}{n}.$$

Determinar su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su función suma.

P 3.16 *(Final 02)* Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,(n+2)}.$$

Obtener su intervalo de convergencia, analizando el comportamiento en los extremos. Calcular su función suma en el interior de dicho dominio.
Indicación: Para determinar la suma, descomponer en fracciones simples el coeficiente del término general.

P 3.17 *(Julio 03)* Se consideran las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^p}(x-2)^n\,,\quad p\geq 0.$$

1. Determinar su radio y dominio de convergencia según los valores de p.
2. Para el caso $p=1$, obtener la suma de la serie en el interior del intervalo de convergencia.

P 3.18 *(Junio 04)* Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n,$$

calcular su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su suma en dicho dominio.

P 3.19 *(Primer parcial 06)* Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)},$$

calcular su radio de convergencia, el carácter de la serie en los extremos del intervalo de convergencia y su suma.

P 3.20 *(Primer parcial 07)* Para cada número natural $n \geq 2$, sea r_n la recta determinada por los puntos $(1,2)$ y $(n,0)$. Consideremos la región plana R_n comprendida entre las rectas r_{2n}, r_{2n+1} y las rectas de ecuación $x = 1$ y $x = 2$.

a) Calcular el área a_n de la región R_n, para cada $n \geq 1$.

b) Calcular el radio y el dominio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

P 3.21 *(Septiembre 08)* Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5(n+1)}\right)^n x^n,$$

determinar su radio de convergencia, estudiar la convergencia en los extremos y aproximar su suma en $x = -1$ con un error menor que $1/500$.

3.3. Teorema de Taylor. Series de Taylor

P 3.22 *(Febrero 98)* Enunciar y demostrar el criterio de Leibniz para series alternadas. ¿Cuantos sumandos de la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \log(1+x)$ se deben tomar para obtener una aproximación de $\log 2$ con un error menor que 10^{-3}, evaluando la serie en $x = 1$?

P 3.23 *(Febrero 98)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua que verifica $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ si $x \neq 0$. ¿ Cuánto vale $f(0)$? Justificar la respuesta. Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 4 de f. Hallar la serie de Maclaurin de la función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = x - \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t^2}\, dt.$$

¿Cuál es su radio de convergencia?

P 3.24 *(Julio 98)* Estudiar la convergencia de

$$\int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

Hacer el cambio de variable $t = 1 - e^{-x}$ en la integral anterior. Usar la serie de McLaurin de $\log(1-t)$ para escribir la integral resultante como una serie numérica. Enunciar alguno de los teoremas que se utilicen.

P 3.25 *(Primer parcial 2000)* Enunciar el teorema de Taylor. Determinar el grado del polinomio de Taylor en $\pi/3$ que es necesario para calcular $\cos 61^\circ$ con un error menor que 10^{-3} y obtener dicho valor.

P 3.26 *(Primer parcial 2000)* Obtener el desarrollo en serie de Taylor en 0 de

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 5x + 6},$$

indicando el dominio de convergencia. (Utilizar descomposición en fracciones simples).

P 3.27 *(Julio 01)* Se considera la función definida por la determinación principal del arco tangente, es decir $f(x) = \arctan(x)$, tal que $-\pi/2 < f(x) < \pi/2$.

1. Obtener el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $x_0 = 1$, $P_2(x)$, y el correspondiente resto $R_2(x)$.
2. Aproximar el valor de $\arctan(1{,}1)$ mediante $P_2(1{,}1)$, obteniendo una cota del error cometido.
3. Obtener la serie de MacLaurin (serie de Taylor en $x_0 = 0$) de f y encontrar su radio de convergencia. Explicar si puede utilizarse dicha serie para calcular un valor aproximado de $\arctan(1{,}1)$.
4. Obtener una aproximación de $\arctan(1{,}1)$ resolviendo la ecuación $\tan(t) = 1{,}1$ por el método de Newton, realizando las iteraciones necesarias para que se repitan las tres primeras cifras decimales.

P 3.28 *(Septiembre 02)* Se considera la función $f(x) = \log(4 + x^2)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Obtener la serie de MacLaurin de f, especificando su dominio de convergencia.

P 3.29 *(Primer parcial 03)* Se considera la función $f(x) = \ln(1 + x)$ definida en el intervalo $(-1, \infty)$. Obtener la serie de Taylor en cero de f, su radio y su dominio de convergencia. Estudiar el carácter de la integral

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p \operatorname{sen} x}\, dx.$$

Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n},$$

y obtener su suma en caso de que sea convergente.

P 3.30 *(Septiembre 03)*

1. Dentro de un círculo de radio R se inscribe un cuadrado y dentro de éste un nuevo círculo. El proceso se repite indefinidamente. Determinar la suma de las áreas de todos los círculos resultantes.

2. A partir de la serie geométrica, obtener el desarrollo en serie de potencias en el origen de la función

$$f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

P 3.31 *(Primer parcial 04)* Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1.$$

1. Obtener la serie de Maclaurin de f y su dominio de convergencia.

2. Probar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$$

es convergente y calcular su suma integrando f en el intervalo $[0,1]$.

P 3.32 *(Primer parcial 05)* Definir el polinomio de Taylor y el resto de Lagrange de grado n de una función f en un punto a. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}, \quad x \neq 0.$$

(a) Calcular $f(0)$.

(b) Obtener el polinomio de Maclaurin de f de grado 4.

(c) Aproximar $f(1)$ utilizando el polinomio obtenido en el apartado anterior y estimar el error cometido.

P 3.33 *(Primer parcial 08)* (i) Usar la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para calcular la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2},$$

así como su dominio de convergencia. (ii) Dada la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{9}{10}\right)^n,$$

estudiar su carácter y calcular su suma.

Capítulo 4

Curvas

P 4.1 Encontrar una parametrización de la cisoide. Esta curva plana se genera del siguiente modo: Un rayo arbitrario OB intersecta la línea recta $x = a$ en B. Sea C la proyección de B sobre el eje OY y M la proyección de C sobre OB. El punto M es el que describe la cisoide.

P 4.2 Comprobar que el ángulo que forma la tangente a la hélice en un punto con la generatriz del cilindro que pasa por ese punto es constante.

P 4.3 Demostrar que las rectas son las únicas curvas cuyo vector tangente unitario es constante en todos sus puntos.

P 4.4 La cicloide es la trayectoria que sigue un punto de una circunferencia cuando ésta rueda a lo largo de una línea recta sin deslizamiento. Probar que la cicloide viene parametrizada por $r(t) = a(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ para $t \in [0, 2\pi]$, siendo a el radio de la circunferencia.

P 4.5 Hallar las rectas tangentes a las siguientes curvas en el punto P que se indica:

1. $r(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ y $P = (1, 0, 0)$.
2. $r(t) = \left(t^2, t^3\right)$ y $P = (1, 1)$.

P 4.6 Calcular las longitudes de las siguientes curvas o arcos de curvas (suponemos que todas constantes que aparecen son positivas):

1. La hélice circular, dada por $r(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ con $t \in [0, c]$.
2. La curva parametrizada por $r(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$ con $t \in [0, a]$.
3. La catenaria $y = a^{-1} \cosh(ax)$ entre $x = -1$ y $x = 1$.
4. El arco de la curva $y = a \ln\left(a^2 - x^2\right)$ $(a > 1)$ situado por encima del eje OX.
5. El perímetro de la luna formada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$ y $x^2 + y^2 = 2by$, siendo $a > b > 0$.
6. La astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

7. La poligonal $r(t) = (|t|, |t-2|)$ para $t \in [-1, 4]$.

P 4.7 Calcular las longitudes de las siguientes curvas dadas en coordenadas polares:

1. El arco de la espiral logarítmica $r(\theta) = e^{a\theta}$, con $a > 0$, que se encuentra dentro de la circunferencia unidad ¿Qué ocurre si $a < 0$?
2. La cardioide dada por $r(\theta) = 1 - \cos\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$.

P 4.8 Hallar la parametrización con respecto a la longitud de arco y utilizarla para calcular los vectores unitarios tangente y normal y la curvatura de

1. la circunferencia de radio a,
2. la hélice circular $r(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$ con $t \in [0, c]$, siendo a, b y c constantes.

P 4.9 Demostrar que si una curva plana viene dada por $y = y(x)$ entonces su curvatura es

$$\kappa = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}.$$

Aplicar esta fórmula para hallar la curvatura de una parábola y de una elipse de semiejes a y b.

P 4.10 La lemniscata es el lugar geométrico de aquellos puntos del plano tal que el producto de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante e igual al cuadrado de la semidistancia entre los focos. Comprobar que su ecuación en coordenadas polares es $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$. Calcular el área encerrada por esta lemniscata.

P 4.11 Calcular el área del recinto exterior a $x^2 + y^2 = a^2$ e interior a la lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

P 4.12 *(Segundo parcial 05)* Demostrar que la curvatura K de la curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$ es

$$K = \frac{\left|2\,(r')^2 - r\,r'' + r^2\right|}{\left[(r')^2 + r^2\right]^{3/2}}.$$

Calcular la curvatura de la curva $r = a\operatorname{sen}\theta$.

Capítulo 5

Funciones de varias variables

5.1. Cambio de variables

P 5.1 Demostrar que el cambio de variables

$$u = \frac{y^2 - x^2}{2}, \quad v = \frac{y^2 + x^2}{2},$$

transforma la ecuación $y^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - x^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, en la ecuación

$$2(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = v \frac{\partial F}{\partial u} - u \frac{\partial F}{\partial v},$$

suponiendo que las derivadas cruzadas son iguales.

P 5.2 Dada la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

y el cambio de variables $u = ax + y, \;\; v = 2x$, calcular $a \in \mathbb{R}$ para que la única derivada parcial de segundo orden que aparezca en la ecuación transformada sea $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

P 5.3 *(Julio 96)* Transformar la ecuación en derivadas parciales

$$z_{xx} + x z_{xy} + \left(\frac{x^2}{2} - y \right) z_{yy} = 0,$$

mediante el cambio de variables $x = u + v, \; y = uv$.

P 5.4 *(Segundo parcial 97)* Dado el cambio de variables definido por las ecuaciones $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, calcular su jacobiano y el de su inverso. Transformar mediante dicho cambio la expresión

$$x z_x + y z_y + z_{xx} + z_{yy}.$$

P 5.5 *(Segundo parcial 99)* Sea $z(x,y)$ una función cuyas derivadas parciales segundas existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$. Transformar la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

mediante el cambio de variables $u=x-y$, $v=x+ay$, donde a es una constante. Calcular el valor del parámetro a para el que la ecuación del apartado anterior se transforma en la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0.$$

P 5.6 *(Julio 99)* En la expresión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

donde $u=u(x,y)$, efectuar el cambio de variables independientes

$$x=e^r\cos\theta,\quad y=e^r\operatorname{sen}\theta.$$

P 5.7 *(Julio 2000)* Obtener la ecuación en que se transforma la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, donde $u=u(x,y)$, al efectuar el cambio a coordenadas polares, $x=r\cos t,\ y=r\operatorname{sen} t$.

P 5.8 *(Segundo parcial 01)* Obtener la expresión en que se transforma

$$z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy},$$

al cambiar las variables independientes (x,y) por (u,v) y la función z por w, considerando que unas y otras están relacionadas por

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2},\quad z=\frac{u^2-v^2}{4}-w.$$

P 5.9 *(Julio 02)* Se considera la ecuación de ondas $w_{tt}=c^2w_{xx}$, donde c es una constante real y la función incógnita es $w=w(x,t)$. Transformarla mediante el cambio de variables $u=x+ct$, $v=x-ct$. Integrar la ecuación que resulta para $w(u,v)$ y probar que

$$w(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct),$$

donde f y g son funciones arbitrarias.

5.2. Derivación implícita

P 5.10 *(Septiembre 95)* La ecuación $x^2+y^3+xy+x^3+ay=0$, define a y como función implícita de x, es decir $y=f(x)$, en un entorno de $(0,0)$, si $a\neq 0$.

1. Calcular el polinomio de Taylor de tercer grado, $P_3(x)$, de f en $x=0$ para $a\neq 0$.
2. Para $a=-1$, demostrar que $P_3(x)$ tiene un único corte con $y=1$ en el intervalo $[0,+\infty)$. hallar dicho punto de corte mediante el método de Newton con un error menor que 10^{-5}.

P 5.11 *(Diciembre 95)* Demostrar que la curva

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + z^2 &= 1, \\ xy + xz &= 2, \end{aligned}$$

es tangente a la superficie de ecuación implícita $xyz - x^2 - 6y + 6 = 0$, en el punto $(1, 1, 1)$.

P 5.12 *(Segundo parcial 99)* La ecuación

$$F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

define a z como función implícita de x e y, es decir $z = f(x, y)$. Determinar las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ en función de las parciales D_1F y D_2F.

5.3. Extremos libres

P 5.13 *(Segundo parcial 99)* Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar definido por $f(x, y) = y\left(x^2 - (y - 1)^2\right)$. Determinar sus puntos críticos y clasificarlos.

P 5.14 *(Segundo parcial 99)* La ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y + 3z = 0,$$

define a z como función de x e y, $z = h(x, y)$, en un entorno de (x_0, y_0) para todo punto (x_0, y_0, z_0) que satisface la ecuación. Calcular los puntos (x_0, y_0, z_0) para los que la función $z = h(x, y)$ tiene puntos críticos y determinar su carácter de extremo relativo.

P 5.15 *(Julio 99)* La ecuación $z^3 - 2xz + y = 0$, define z como función implícita de (x, y) en un entorno de $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Obtener las derivadas parciales de segundo orden de $z = z(x, y)$ en el punto $(x, y) = (1, 1)$. Si $z = z(x, y)$ es la función del apartado anterior, comprobar que $(x, y) = (1, 1)$ es un punto crítico de la función $g(x, y) = z(x, y) - 2(x - 1) + y - 1$, y estudiar su carácter.

P 5.16 *(Febrero 02)* Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{8y}{1 + x^2 + y^2}$$

1. Obtener sus puntos críticos, clasificarlos y determinar los valores extremos de f.

2. Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de f en el origen.

5.4. Multiplicadores de Lagrange

P 5.17 *(Segundo parcial 95)* Calcular el punto más lejano y más cercano del conjunto $S = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + z \geq a\right\}$ al punto $(0, a, 0)$.

P 5.18 *(Segundo parcial 2000)* Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y,z)=x+y+z$, en el conjunto

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le z\le 1\right\}.$$

P 5.19 *(Julio 2000)* Hallar la distancia mínima entre la elipse $x^2+2y^2=6$ y la recta $x+y=5$.

P 5.20 *(Febrero 01)* Hallar los extremos absolutos de $f(x,y)=xy^2$, en el conjunto

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}.$$

P 5.21 *(Julio 02)* Obtener los extremos absolutos de la función $f(x,y)=xy$ en el recinto $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2\le 4\right\}$.

P 5.22 *(Septiembre 02)* Calcular los extremos absolutos de la función

$$f(x,y)=4x^2+9y^2-x^2y^2,$$

en el conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}$.

P 5.23 *(Segundo parcial 04)* Hallar los extremos absolutos de

$$f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{xy}$$

en el conjunto $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\right\}$.

P 5.24 *(Junio 04)* Hallar los extremos absolutos de $f(x,y)=4x^2+y^2-4x-3y$, sobre el conjunto

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge 0,\ 4x^2+y^2\le 4\right\}.$$

P 5.25 *(Septiembre 04)* Hallar el máximo y el mínimo absolutos de la función

$$f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\int_0^x \frac{2t}{1+t^4}\,dt,$$

en el conjunto $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\right\}$.

P 5.26 *(Segundo parcial 05)* Hallar los puntos de la elipse

$$\begin{aligned} 2x^2+y^2-4 &= 0, \\ x+y+z &= 0, \end{aligned}$$

más cercanos y más lejanos al eje OY.

P 5.27 *(Julio 05)* Obtener los extremos absolutos de la función

$$f(x,y)=y^3+x^2y+2x^2+2y^2-4y-8,$$

en el conjunto $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\right\}$.

P 5.28 *(Septiembre 05)* Calcular las distancias mínima y máxima del plano

$$x + y + 2z = 0$$

a los puntos de la elipse

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

P 5.29 *(Segundo parcial 06)* Hallar los extremos absolutos de

$$f(x, y, z) = x - y - z,$$

sobre el conjunto

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 - 1 = 0, \quad 3x - 4z = 0\right\}.$$

P 5.30 *(Septiembre 06)* Calcular el valor máximo de la función

$$f(x, y, z) = x + 2y - z,$$

en el recinto

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ \ x + y + z \geq 0\right\}.$$

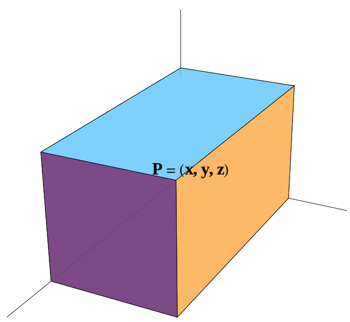
P 5.31 *(Segundo parcial 07)* Hallar el punto más alto de la curva dada por la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36, \quad 2x + y - z = 2.$$

P 5.32 *(Junio 07)* Sea $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$ la temperatura en cada punto de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. Hallar las temperaturas máxima y mínima en la curva formada por la intersección de la superficie esférica y el plano $x - z = 0$.

P 5.33 *(Septiembre 07)* Hallar el punto más bajo de la curva intersección del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y el plano $x + 2z = 4$.

P 5.34 *(Segundo parcial 08)* Una caja rectangular se coloca en el primer octante con un vértice en el origen y las tres caras adyacentes en los planos coordenados como muestra la figura. Además, el vértice $P = (x, y, z)$ con coordenadas $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, pertenece al paraboloide de ecuación $2x^2 + y^2 + z = 1$. Hallar el punto P que maximiza el volumen de la caja.



P 5.35 *(Junio 08)* Dada la función $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 3x - 4y$, calcular sus extremos absolutos sobre la región cerrada y acotada

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \;\; x^2 + 4y^2 \leq 4\right\}.$$

P 5.36 *(Septiembre 08)* Hallar los extremos absolutos de la función

$$f\left(x,y,z\right) = x^2 + y - z^2,$$

sobre el conjunto $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, \;\; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Capítulo 6

Integración múltiple

6.1. Integrales dobles

P 6.1 Sea V el sólido definido en $\mathbb{R}^3$ por

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \;\; x^2 + y^2 \leq 1, \;\; z \geq |y|\right\}$$

(se parece a la punta de un destornillador). Calcular el volumen de V.

P 6.2 Sea S la porción acotada del primer cuadrante situada entre las curvas de ecuaciones $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$. Dibujarla y calcular la integral

$$\iint\limits_S x^2 y^2 dxdy.$$

P 6.3 Calcular el volumen de la región del espacio definida por las desigualdades

$$x^2 + y^2 \leq 1, \;\; x + y \geq 1, \;\; z \geq 0, \;\; z^2 \leq \frac{1}{(x^2 + y^2)^3}.$$

P 6.4 *(Febrero 01)* Calcular $\iint_S x^3 y^3 \, dxdy$, siendo S la región contenida en el cuadrante positivo y limitada por las curvas

$$x^2 + y^2 = 2, \;\; x^2 + y^2 = 4, \;\; x^2 - y^2 = 1, \;\; x^2 - y^2 = 2.$$

P 6.5 *(Julio 06)* Sea R la región acotada por las curvas

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{2x}, \quad y = \frac{x^2}{3}, \quad y = \frac{x^2}{4}.$$

Utilizar el cambio de variables $x = u^{1/3} v^{2/3}$, $y = u^{2/3} v^{1/3}$ para hallar el área de la región R.

P 6.6 *(Segundo parcial 07)*
(a) Calcular el área de la región plana encerrada por la lemniscata de ecuación $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 9\left(x^2 - y^2\right)$.
(b) Obtener el volumen del sólido interior al cilindro de ecuación

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 9\left(x^2 - y^2\right)$$

y al hemisferio de ecuación $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

6.2. Integrales triples

P 6.7 Calcular $\iiint_V \exp\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dxdydz$, donde V es el conjunto de los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$.

P 6.8 *(Julio 94)* Calcular la integral triple $\iiint_V y^2\, dxdydz$, donde V es el sólido

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 0,\ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\} \cup \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{1}{x^2+y^2},\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}.$$

P 6.9 Calcular la integral $\iiint_G z^2\, dxdydz$, siendo G el recinto sólido definido por $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$.

P 6.10 Sea Ω el recinto comprendido entre el interior de un paraboloide $z+3 \geq x^2+4y^2$ y el interior de un elipsoide $x^2+4y^2+z^2 \leq 9$. Calcular $\iiint_\Omega z\, dxdydz$.

P 6.11 *(Septiembre 97)* Consideremos el recinto del primer octante de $\mathbb{R}^3$,

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq xy \leq b,\ \ a \leq y^2-x^2 \leq b,\ \ z \leq x^2+y^2\right\},$$

con $0 < a < b$. Calcular el volumen de Ω y hallar $\iiint_\Omega \left(xy^3 - x^3y\right)\, dx\, dy\, dz$.

P 6.12 Calcular el volumen del sólido definido por las desigualdades

$$\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 & \leq & 4a^2, \\ z & \geq & a, \end{array}$$

$(a > 0)$ mediante coordenadas esféricas y mediante coordenadas cilíndricas.

P 6.13 *(Segundo parcial 98)* Sea V el sólido limitado, inferiormente por la parte superior del cono $4x^2+4y^2 = z^2$, y superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2 = 2z$. Calcular la integral $\iiint_V (1+x)\, dx\, dy\, dz$.

P 6.14 Calcular el plano Π tangente a la superficie de ecuación $xz^3 + 3zx - x - y = 0$ en el punto $(1,3,1)$. Sean A, B y C los puntos en los que el plano Π corta a los ejes coordenados. Calcular mediante una integral triple el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos A, B y C.

P 6.15 Calcular, usando coordenadas esféricas,

$$\iiint_V \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\, dV,$$

siendo V el recinto limitado en el primer octante por la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$.

P 6.16 Calcular el volumen de

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2+y^2 \leq \frac{1}{4},\ \ (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \leq z \leq (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

usando coordenadas esféricas y cilíndricas.

P 6.17 Siendo $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 \leq 36\right\}$, calcular, usando un cambio de variables adecuado, la integral

$$\iiint_V (2x + 3y + 6z)^2 \, dxdydz.$$

P 6.18 *(Septiembre 05)* Hallar el volumen del sólido situado en el exterior del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que lo limita, en el semiplano $z \geq 0$ y en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

6.3. Aplicaciones

P 6.19 *(Julio 99)* A una esfera maciza de radio unidad se le hace un taladro cilíndrico siguiendo un eje diametral de la esfera. Suponiendo que el cilindro es circular de radio a, con $0 < a < 1$, y que el eje que se usa para taladrar la esfera es el OZ, el sólido resultante queda definido por

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\right\}.$$

Calcular su volumen. Calcular el área total de la superficie exterior de V (incluyendo la parte cilíndrica) ¿Para qué valor de a se hace máxima el área calculada en el apartado anterior? ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

P 6.20 Hallar el volumen de la parte del cilindro $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $a > 0$, que es interceptada por el cilindro parabólico $z^2 = 2ax$.

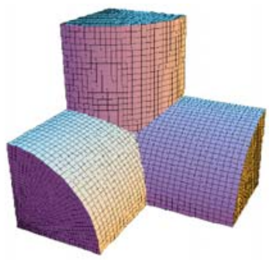
P 6.21 *(Julio 03)* Calcular el volumen del sólido interior al cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 2ax$, que está comprendido entre el plano $z = 0$ y la parte superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$.

P 6.22 *(Segundo parcial 06)*

(a) Evaluar las integrales $\displaystyle\iint_{D_1} \sqrt{1 - x^2}\, dx\, dy$, $\displaystyle\iint_{D_2} \sqrt{1 - y^2}\, dx\, dy$, donde

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}, \\ D_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\right\}. \end{aligned}$$

(b) Calcular el volumen del sólido dado por la intersección de los tres cilindros sólidos $x^2 + y^2 \leq 1$, $x^2 + z^2 \leq 1$, $y^2 + z^2 \leq 1$, situado en el octante positivo $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. *Indicación: aplicar los resultados obtenidos en (a).*



Capítulo 7

Análisis vectorial

7.1. Integrales de línea de campos escalares y vectoriales

P 7.1 En cada uno de los siguientes casos, determinar si F es o no el gradiente de un campo escalar. En caso afirmativo, calcular una función potencial.

1. $F(x,y) = \big(2xy, x^2+1\big)$.
2. $F(x,y) = (x,y)$.
3. $F(x,y) = \big(3x^2y, x^3\big)$.
4. $F(x,y) = (\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x, \cos(x) + x\cos(y) + y)$.
5. $F(x,y) = \big(x+y^2, 2xy\big)$.
6. $F(x,y) = \big(x^2+y^2, 0\big)$.
7. $F(x,y,z) = \big(2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, x^2z - 4xy, x^2y + 2xz - 2\big)$.
8. $F(x,y,z) = (x+z, -y-z, x-y)$.

P 7.2 Calcular la integral $\int_C x^2y\,ds$, sobre las siguientes curvas:

1. La semicircunferencia $x^2+y^2=1$, con $y \geqslant 0$.
2. La semicircunferencia $x^2+y^2=1$, con $x \leqslant 0$.

P 7.3 En los siguientes casos, calcular $\int_C (xy+z-1)\,ds$:

1. $r_1(t) = (-t,-t,-t)$ con $-1 \leqslant t \leqslant 0$.
2. $r_2(t) = \big(t^2,t^2,t^2\big)$, para $t \in [-1,0]$.
3. $r_3(t) = \big(t^2,t^2,1\big)$ si $t \in [-1,0]$, y $r_3(t) = \big(0,0,1-t^2\big)$ para $t \in [0,1]$.

P 7.4 Calcular la integral $\int_C z\,ds$, siendo C la hélice cónica parametrizada por $r(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, t)$, para $t \in [0,6\pi]$.

P 7.5 Si O es el origen y $P = (1, 1, 1)$, calcular la integral de línea

$$\int_C y\,dx - (x - y)\,dy + x\,dz,$$

a lo largo de las curvas que tienen O como punto inicial y P como punto final dadas a continuación (siendo $A = (1, 0, 0)$ y $B = (1, 1, 0)$).

1. La diagonal OP.
2. Las aristas del cubo $OABP$.
3. La poligonal OBP.

P 7.6 Calcular la integral $\int_C (-y, x) \cdot dr$ para las siguientes curvas:

1. La semicircunferencia unidad orientada de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.
2. Los segmentos de recta que unen los puntos $(0, 0)$, $(-1, 1)$ y $(0, 2)$, orientados en este sentido.

P 7.7 Calcular $\oint_C (2xy - x^2, x + y^2) \cdot dr$ sobre las siguientes curvas cerradas:

1. El rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ y $(0, 2)$.
2. La curva cerrada formada por las parábolas $y = x^2$, $y^2 = x$.
3. El triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$.

P 7.8 Calcular $\int_C (x^2 - y^2)\,dx - x\,dy$, desde $A = (0, 2)$ hasta $B = (2, 0)$, a lo largo de las siguientes curvas:

1. La recta AB.
2. El cuadrante de circunferencia de centro O y radio 2.
3. La poligonal que une A y B pasando por $D = (2, 2)$.

P 7.9 Dada la curva $r(t) = (1 + t, 1 - t, t^2)$, con $t \in [0, 1]$, calcular $\int_C F \cdot dr$ para los siguientes campos vectoriales:

1. $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$.
2. $F(x, y, z) = (xyz, 0, 0)$.
3. $F(x, y, z) = (0, 0, xyz)$.

P 7.10 Calcular las siguientes integrales sobre las curvas en $\mathbb{R}^3$ que se indican:

1. $\int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, con $r(t) = (1 + t, -1 + t, 1 + 2t)$ para $t \in [0, 1]$.
2. $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, donde C es la curva intersección del plano $x + y - 2 = 0$ con la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, orientada en el sentido del reloj si se mira la curva desde el origen.

3. $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, donde C es la curva intersección de las superficies $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ orientada en el sentido del reloj si se mira la curva desde un punto muy alto del eje OZ.

4. $\oint_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, siendo C el triángulo de vértices $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$ recorrido en este sentido.

5. $\int_C (x, y, xz - y) \cdot dr$, siendo C el segmento que une los puntos $(0,0,0)$ y $(1,2,4)$.

6. $\int_C (x, zy, y - x^2) \cdot dr$, donde C es la hélice $r(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$ con $t \in [0, 4\pi]$.

P 7.11 *(Septiembre 07)* Calcular la integral de línea

$$\oint_C (8x + z)\ dx + 2xz^2\,dy - 4y^2\,dz,$$

siendo C la curva definida por las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} z = 9 - 2x^2 - 4y^2, \\ z = 1, \end{array}\right.$$

que tiene orientación positiva si se observa desde un punto alto del eje OZ.

7.2. El teorema de Green

P 7.12 *(Segundo parcial 99)* Se considera la curva cuya ecuación en coordenadas polares es $r(\theta) = \sqrt{2} + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$. Dibujar su gráfica e indicar de qué curva se trata. Para el arco C de la curva anterior que va de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$, calcular la integral de línea

$$\int_C (x^3 - y + e^y)\,dx + (y^2 + xe^y)\,dy.$$

P 7.13 Verificar el teorema de Green con $F(x,y) = (2xy - x^2, x + y^2)$ en las siguientes regiones.

1. El rectángulo de vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,2)$ y $(1,0)$.

2. El triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,2)$ y $(1,0)$.

3. La zona encerrada por las parábolas $y = x^2$, $y^2 = x$.

P 7.14 *(Julio 99)* Sea C el arco de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$, contenido en el primer cuadrante y recorrido desde el punto $(1,0)$ hasta el origen de coordenadas. Usar el teorema de Green para calcular

$$\int_C \left(e^x \cos y + xy^2\right) dx - \left(e^x \operatorname{sen} y + x^2 y\right) dy.$$

P 7.15 Usando el teorema de Green, calcular el área de las siguientes regiones mediante una integral de línea adecuada.

1. La región encerrada por la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

2. La zona encerrada por un arco de cicloide y el eje OX.

3. El área encerrada por un lazo de la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

P 7.16 Sea F el campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ definido por $F(x, y) = (y, x)$. Probar que

$$\int_C F \cdot dr = 0,$$

a lo largo de cualquier curva cerrada C.

P 7.17 Usando el teorema de Green, evaluar la integral de línea

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy,$$

a lo largo de las siguientes curvas:

1. El arco de parábola $y^2 = 2(x + 2)$ con la cuerda $x = 2$.

2. La circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

P 7.18 Evaluar la integral

$$\oint_C -\log(x^2 + y^2)\, dx + \log(x^2 + y^2)\, dy,$$

siendo C cada uno de los arcos de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ con la cuerda $x = a/2$. (Observar que el integrando no es continuo en el círculo de radio a).

P 7.19 Sean A y B dos puntos sobre el eje OX del plano y sea C una curva simple y suave a trozos que une los puntos A y B. Supongamos que C está contenida en el exterior de la circunferencia unidad y en el semiplano superior. Sea F el campo vectorial $F(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}(x, y)$, $(x, y) \neq (0, 0)$; y sea n la normal unitaria a C. Demostrar que

$$\int_C F \cdot n\, dr \in \{-\pi, 0, \pi\}.$$

P 7.20 *(Segundo parcial 2000)* Sea R la región en el plano $\mathbb{R}^2$ limitada por las curvas

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 9, \quad x + y = 4, \quad x + y = 6.$$

Mediante el cambio de variables

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & x + y \\ v & = & x - y \end{array} \right.$$

se transforma la región dada en otra T. Se pide:

1. Representar gráficamente las regiones R y T.

2. Calcular el área de la región R utilizando T.

3. Siendo C la frontera de la región R recorrida en sentido positivo, obtener el valor de la integral de línea

$$\oint_C (x^2 - y^2)\, dx + (x^2 - 4)\, dy.$$

P 7.21 *(Julio 2000)* Sea C una curva cerrada simple que encierra una región D. Demostrar, usando el teorema de Green, que el área de la región es

$$\acute{a}rea\,(D) = \oint_C x\, dy = \oint_C -y\, dx = \frac{1}{2}\oint_C x\, dy - y\, dx.$$

Usando una de las anteriores integrales de línea, calcular el área del interior de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

P 7.22 *(Septiembre 2000)* Sea C la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = 4$ orientada positivamente. Usar el Teorema de Green para calcular

$$\oint_C \left(x^2 + 2y^3\right)\, dy.$$

P 7.23 *(Julio 01)* Calcular directamente y usando el teorema de Green

$$\oint_C 2\left(x^2 + y^2\right)\, dx + (x+y)^2\, dy,$$

donde C es el contorno del triángulo con vértices en los puntos $(1,1)$, $(2,2)$ y $(1,3)$ recorrido en sentido positivo.

P 7.24 *(Segundo parcial 01)* Calcular el área encerrada en el lazo de la lemniscata

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$$

contenido en el semiplano $x \geq 0$, usando integrales dobles en coordenadas polares y aplicando el teorema de Green.

P 7.25 *(Segundo parcial 03)* (Cuadratura de la luna) Consideremos la región R del plano que es exterior a la circunferencia con centro en $(0,0)$ que pasa por el punto (a,a) e interior a la circunferencia con centro en $(0,a)$ y radio a. Usando el teorema de Green, demostrar que el área de dicha región coincide con el área de un cuadrado de lado a.

P 7.26 *(Segundo parcial 04)* Sea C la cardioide de ecuación $r = a\,(1 + \cos\theta)$ orientada positivamente.

1. Calcular la integral de línea

$$\oint_C \left[\left(x^2 + y^2 - ax\right)^2 - a^2\left(x^2 + y^2 - 1\right)\right]\, ds,$$

usando el resultado para obtener la longitud de C.

2. Calcular la integral de línea

$$\oint_C y\,dx - x\,dy,$$

y utilizarla para deducir el área de la región encerrada por C.

P 7.27 *(Segundo parcial 08)* Consideremos la región plana

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x, \ \ x^2 + y^2 \geq 2\right\}.$$

1. Calcular el área de R.

2. Sea C la curva frontera de R orientada positivamente. Calcular la integral de línea

$$\oint_C \left(2xy - y^2\right)\,dx + \left(x^2 + y\right)\,dy.$$

3. Calcular la longitud de C.

P 7.28 *(Junio 08)* Sea C la curva frontera de la región

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \ \ x^2 + 4y^2 \leq 4\right\},$$

con orientación positiva. Calcular la integral de línea

$$\oint_C xy\,dx + x^2\,dy.$$

7.3. Integrales de superficie

P 7.29 En los siguientes casos, describir las superficies —mediante una ecuación si es posible— y determinar el producto vectorial fundamental:

1. El plano $r(u,v) = (a_1 + b_1u + c_1v, a_2 + b_2u + c_2v, a_3 + b_3u + c_3v)$.

2. El paraboloide $r(u,v) = \left(au\cos v, bu\,\mathrm{sen}\,v, u^2\right)$.

3. La superficie de revolución $r(u,v) = (u\cos v, u\,\mathrm{sen}\,v, f(u))$, siendo f una función real.

4. El cilindro elíptico $r(u,v) = (u, a\,\mathrm{sen}\,v, b\cos v)$.

5. El toro $r(u,v) = ((a + b\cos u)\,\mathrm{sen}\,v, (a + b\cos u)\cos v, b\,\mathrm{sen}\,u)$, $0 < b < a$.

6. El hiperboloide de una hoja $r(u,v) = (a\cosh u\cos v, b\cosh u\,\mathrm{sen}\,v, c\,\mathrm{senh}\,u)$.

7. El hiperboloide de dos hojas $r(u,v) = (a\,\mathrm{senh}\,u\cos v, b\,\mathrm{senh}\,u\,\mathrm{sen}\,v, c\cosh u)$.

8. El elipsoide $r(u,v) = (a\,\mathrm{sen}\,u\cos v, b\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v, c\cos u)$.

9. El cono $r(u,v) = (av\cos u, bv\,\mathrm{sen}\,u, v)$.

10. El paraboloide hiperbólico $r(u,v) = \left(u, v, u^2 - v^2\right)$.

11. El cilindro hiperbólico $r(u,v) = (a\cosh v, b\,\mathrm{senh}\,v, u)$.

12. El cilindro parabólico $r(u,v) = \big(u, -cu^2, v\big)$.

P 7.30 Determinar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a cada una de las siguientes superficies en el punto dado:

1. La copa parabólica $r(u,v) = \big(u, v, u^2 + v^2\big)$, $u^2 + v^2 \leqslant 10$ en el punto $(1, 2, 5)$.
2. La semiesfera unidad en $(1/3, 2/3, 2/3)$.
3. La hoja triangular $x + y + z = 1$, $x, y, z \geqslant 0$ en $(1/2, 1/4, 1/4)$.
4. El cono $r(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, u)$ en el punto $(1, 0, 1)$.
5. La superficie $r(u,v) = \big(u, v, u^2 - v^2\big)$ en el punto $(1, 1, 0)$.

P 7.31 Calcular el área de las siguientes superficies:

1. La porción del cilindro $x^2+z^2 = a^2$ que es interior al cilindro $x^2+y^2 = a^2$.
2. El trozo interceptado en $z^2 = 2xy$ por la esfera unidad.
3. La parte del cilindro parabólico $y^2 = ax$ interceptado por el paraboloide de ecuación $y^2 + z^2 = 4ax$ y el plano $x = 3a$.
4. En el caso anterior, la porción del paraboloide interceptado por el cilindro.
5. La región que determina el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ en el plano $x + y + z = a$.
6. La porción del plano $2x + y + 2z = 16$, delimitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.
7. La porción de la esfera $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$, encerrada en el paraboloide $z = x^2 + y^2$.
8. El trozo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, que está en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = ax$.
9. La porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ comprendida en el interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$, con $a > 0$.

P 7.32 Una esfera está inscrita en un cilindro circular recto. La esfera es cortada por dos planos paralelos perpendiculares al eje del cilindro. Comprobar que las áreas de las porciones de esfera y de cilindro comprendidas entre esos planos coinciden.

P 7.33 Calcular las integrales de superficie $\iint_S f\, dS$ de las siguientes funciones f en las superficies S que se indican:

1. $f(x,y,z) = x + y + z$ y S es la esfera de radio unidad y centro el origen.
2. $f(x,y,z) = x^2 z^2$ y S es la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ con $|z| \leqslant 1$.
3. $f(x,y,z) = x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1$ y S es la porción que el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ recorta en la hoja superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$.

4. $f(x, y, z)$ es el inverso de la distancia desde el origen al plano tangente al elipsoide S de ecuación $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4a^2$ en el punto (x, y, z).

5. $f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$ y S es el octante positivo de la superficie esférica unidad.

P 7.34 Sea $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular $\iint_S F \cdot n \, dS$, siendo n el vector normal unitario exterior a la superficie, en los siguientes casos:

1. S es el cilindro $x^2 + y^2 = k^2$ con $0 \leqslant z \leqslant h$.

2. S es el cono circular de altura $h > 0$ de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$.

3. S es el paraboloide $z = 2 - (x^2 + y^2)$ con $z \geqslant 0$.

4. S es la parte del plano $2x + y + 2z = 16$ cortada por $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$.

P 7.35 Calcular las siguientes integrales:

1. $\iint_S z \, dxdy$, siendo S la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con vector normal interior.

2. $\iint_S xz \, dydz + yz \, dzdx + z^2 \, dxdy$, siendo S el octante positivo de la esfera unidad con vector normal exterior.

3. $\displaystyle\iint_S \frac{x \, dydz + y \, dzdx + z \, dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, siendo S la esfera unidad con vector normal exterior.

P 7.36 *(Segundo parcial 01)* Sea S el trozo del cono $x^2 = y^2 + z^2$, interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y situado en el octante positivo $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Calcular el área de S.

P 7.37 *(Septiembre 02)* Sea S_1 la porción de $x^2 + y^2 = 2y$ comprendida entre $y + z = 2$ y $z = 0$. Obtener su área.

7.4. Los teoremas de Stokes y de Gauss

P 7.38 *(Segundo parcial 2000)* Sea S el trozo de la superficie del paraboloide $z = x^2 + (y-1)^2$ interior al cilindro $x^2 + (y-2)^2 = 3$. Sea $F(x, y, z) = (y, x, xz)$ un campo vectorial. Calcular la integral $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS$, con la normal exterior al paraboloide, directamente, usando el teorema de Stokes y usando el teorema de Gauss.

P 7.39 *(Julio 2000)* Utilizando la definición, calcular el flujo del campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la porción del cilindro parabólico $z = x^2$ limitada por los planos $z = a^2$, $y = 0$, $y = b$ (donde $a, b > 0$), orientada dicha superficie de forma que la componente z de la normal sea negativa. Comprobar el resultado utilizando, en forma conveniente, el teorema de la divergencia.

P 7.40 *(Septiembre 2000)* Sea S la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ situada en el primer octante y limitada por el plano $z = 1$. Sea

$$F(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y).$$

Calcular $\iint_S F \cdot n \, dS$, siendo n la normal interior al paraboloide. Calcular directamente la integral $\oint_C F \cdot dr$, donde C es la curva frontera de S. Comprobar el cálculo anterior usando el teorema de Stokes.

P 7.41 *(Segundo parcial 01)* Sea S el trozo del cono $x^2 = y^2 + z^2$, interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y situado en el octante positivo $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Calcular el área de S. Sea $F(x, y, z) = \left(x^2, xy, xz\right)$. Calcular la integral

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS,$$

con la normal exterior al cono, directamente y usando el teorema de Stokes.

P 7.42 *(Julio 01)* Calcular el flujo de salida del campo vectorial

$$F(x, y, z) = \left((x-1)^3, (y+1)^3, (z-1)^3\right),$$

a través de la superficie cerrada

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 0\right\}.$$

P 7.43 *(Septiembre 01)* Se considera el sólido V limitado en el primer octante por la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 5$. Calcular el flujo de salida del campo vectorial $F(x, y, z) = (2y, zy, 3z)$ a través de la frontera S del sólido V, directamente y usando el teorema de Gauss.

P 7.44 *(Febrero 02)* Dada la superficie

$$S(u, v) = \left(u, v - u, \frac{1 - v^2}{2\sqrt{2}}\right), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad -1 \leq v \leq 1,$$

1. Calcular el área de S.
2. Calcular el flujo del campo vectorial $F(x, y, z) = (x + y, x - y, z)$ a través de la superficie S orientada con la normal exterior.
3. Usando el teorema de Stokes, calcular la integral de línea del campo F a lo largo de la curva C que forma la frontera de S.
4. Sea V el sólido limitado por S y por los planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$. Calcular la integral triple de la divergencia de F en V directamente y usando el teorema de Gauss.

P 7.45 *(Segundo parcial 02)* Sea Ω el sólido comprendido en el interior de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

que es exterior al cono $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$. Sea S_1 la parte de la frontera de Ω correspondiente a la esfera y S_2 la parte de la frontera de Ω correspondiente al cono. Obtener el área de la superficie $S = S_1 \cup S_2$, frontera de Ω, parametrizando S_1 y S_2. Calcular el flujo de salida del campo $F(x, y, z) = (x - z, y - z, z)$ a través de la frontera S del sólido Ω, directamente y utilizando el teorema de Gauss.

P 7.46 *(Julio 02)* Sea S la superficie formada por las cinco caras superiores del cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Sea $F(x,y) = \big(xy, 0, -z^2\big)$. Hallar

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS$$

donde n es el vector normal exterior al cubo.

P 7.47 *(Septiembre 02)* Se considera el sólido V limitado por la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 2y$ y los planos $z = 0$, $y + z = 2$. Calcular el flujo de salida del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \big(x^2 + \operatorname{sen} z, xy + \cos z, e^y\big)$$

a través de la frontera S de V.

P 7.48 *(Segundo parcial 03)* Sea S la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra en el semiespacio $2y + z \leq 3$. Calcular el flujo de salida del campo $F\,(x,y,z) = (y + z, x + z, z)$ directamente y mediante el teorema de Gauss. *Indicación:* Utilizar las coordenadas $x = r\cos\theta$, $y = -1 + r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$, para parametrizar S.

P 7.49 *(Julio 03)* Sea C la curva intersección del plano $y + \sqrt{2}z = 0$ con el elipsoide $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 = 1$, orientada positivamente cuando se la mira desde un punto situado muy arriba en el eje OZ. Calcular

$$\int_C \left(-y + \cos e^x\right)\, dx + y\, dy + z\, dz$$

aplicando el teorema de Stokes sobre una superficie plana adecuada.

P 7.50 *(Septiembre 03)* Sea Ω el recinto comprendido entre el exterior de un paraboloide y el interior de un elipsoide definido por

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z + 3 \leq x^2 + 4y^2, \;\; x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9\right\}.$$

Sea S la superficie que limita a Ω y sea $F\,(x,y,z) = (xz, \operatorname{sen} z, e^y)$. Calcular $\iint_S F \cdot n\, dS$ usando el teorema de Gauss.

P 7.51 *(Segundo parcial 04)* Consideremos el sólido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \;\; 0 \leq z \leq y, \;\; x^2 + y^2 \leq 4\right\},$$

y sea S la superficie cerrada que limita a V.

1. Calcular el área de la parte cilíndrica S_1 de la superficie S.
2. Calcular directamente el flujo de salida del campo vectorial

   $$F\,(x,y,z) = (x,y,z)$$

   a través de la superficie cerrada S.
3. Calcular el flujo citado aplicando el teorema de la divergencia.

P 7.52 *(Junio 04)* Sea S el octante positivo de la superficie esférica unidad.

1. Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}\, dS.$$

2. Calcular directamente y usando el teorema de Stokes la integral de línea $\oint_C F\cdot dr$, donde C es la curva frontera de S orientada por la normal exterior y

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z).$$

P 7.53 *(Septiembre 04)* Sea V el sólido definido por

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \ \ y \geq 0, \ \ z \geq 0, \ \ y+z \leq 4, \ \ x \leq 6\right\},$$

y sea S la superficie cerrada que limita a V. Calcular, directamente y mediante el teorema de Gauss, el flujo de salida a través de S del campo vectorial

$$F(x,y,z) = (xe^z, ye^z, e^z).$$

P 7.54 *(Segundo parcial 05)* Consideremos la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \geq 0$, orientada según la normal exterior a la esfera y el campo vectorial $F(x,y,z) = \left(-y, yz^2, x^2z\right)$. Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS,$$

directamente, aplicando el teorema de Stokes y usando el teorema de Gauss.

P 7.55 *(Julio 05)* Calcular directamente y usando el teorema de Stokes la integral de línea

$$\oint_C x\,dx + yz^2\,dy + xz\,dz,$$

donde C es la curva dada por la intersección de las superficies

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1, & z \geq 0, \\ x^2+y^2 = y. \end{cases}$$

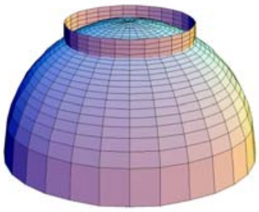
P 7.56 *(Segundo parcial 06)* Sea S la porción de la semiesfera

$$x^2+y^2+z^2 = 4, \ \ z \geq 0,$$

que se encuentra en el interior del cilindro $x^2+y^2 = 1$. Dado el campo vectorial

$$F(x,y,z) = (xy, yz, zx),$$

calcular el flujo exterior del campo $\operatorname{rot}(F)$ a través de S, directamente, usando el teorema de Stokes y aplicando el teorema de Gauss.



P 7.57 *(Julio 06)* Calcular el flujo exterior del campo vectorial

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z),$$

sobre la superficie dada por los puntos del paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ tales que $z \geq 1$.

P 7.58 *(Septiembre 06)* Hallar el flujo exterior del campo vectorial

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z),$$

sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

P 7.59 *(Segundo parcial 07)* Sea S la superficie definida por

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad x + z \geq 1$$

y sea F el campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = (yz, xz, xy).$$

Calcular el flujo exterior del campo F a través de S, directamente y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss.

P 7.60 *(Junio 07)* Sea R la región plana interior a la curva

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

a) Utilizar el cambio de variables $u = x/2$, $v = y/\sqrt{2}$ para calcular la integral doble

$$\iint_R (8 - 2x^2 - 4y^2)\, dx\, dy.$$

b) Calcular el volumen del sólido

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 9 - 2x^2 - 4y^2\right\}.$$

c) Calcular el flujo exterior del campo vectorial

$$F(x, y, z) = \left(8x + z, 2xz^2, -4y^2\right)$$

a través de la frontera S del sólido Q.

P 7.61 *(Segundo parcial 08)* Sea S la porción del paraboloide $z+1=x^2+y^2$, situada debajo del plano $z=1$, y sea $F(x,y,z)=(0,x-2yz,x^2)$. Hallar $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N\,dS$, donde N es la normal exterior al paraboloide, haciéndolo directamente, mediante el teorema de Stokes, y mediante el teorema de Gauss.

P 7.62 *(Junio 08)* Hallar el flujo del campo vectorial $F\,(x,y,z)=\left(4x,-2y^2,z^2\right)$ a través de la superficie exterior del sólido

$$x^2+y^2\leq x, \quad 0\leq z\leq 3,$$

directamente y usando el teorema de Gauss.

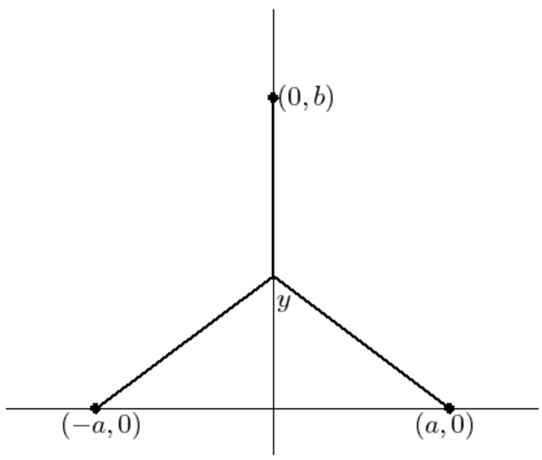
P 7.63 *(Septiembre 08)* Sea S_1 la superficie de ecuación $z=x^2+2y^2$ y sea S_2 la superficie de ecuación $z=4-x^2$. (a) Calcular el volumen del sólido Q acotado por las dos superficies. (b)Calcular el flujo de salida del campo vectorial $F\,(x,y,z)=(x,y,z)$ a través de la frontera de Q. (c) Calcular la integral de línea $\oint_C F\cdot dr$, siendo C la curva intersección de las superficies S_1 y S_2.

Capítulo 8

Exámenes del curso 2008-09

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Primer Examen Parcial. 26 de Enero de 2009

Ejercicio 1. Dos fábricas se localizan en las coordenadas $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ con suministro eléctrico ubicado en $(0, b)$. Determinar el punto $(0, y)$ de manera tal que longitud total de la línea de transmisión eléctrica desde el suministro eléctrico hasta las fábricas sea un mínimo.



Ejercicio 2. La base de un sólido es un círculo de radio r y sus secciones transversales verticales son triángulos equiláteros. Sabiendo que el volumen del sólido es 10 metros cúbicos, encontrar el radio del círculo.

Ejercicio 3. (i) Calcular la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \ln(1 - x^2),$$

así como su dominio de convergencia.

(ii) Dada la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^{n+1}},$$

estudiar su carácter y calcular su suma.

NOTA: Cada ejercicio se entregará en folios independientes, cada uno encabezado con su nombre y apellidos.

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Segundo Examen Parcial. 13 de Junio de 2009

Ejercicio 1.

(a) Encontrar y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

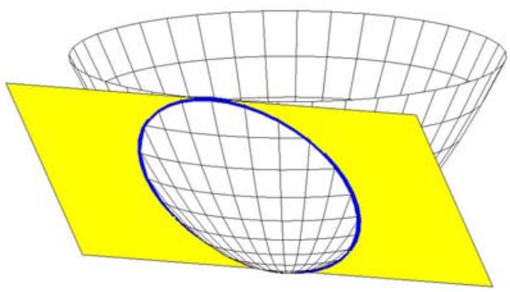
(b) Hallar el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 0, -1)$.

(c) Calcular la distancia mínima del punto $(1, 0, 1)$ al plano tangente obtenido en (b), usando el método de los multiplicadores de Lagrange.

Ejercicio 2.
Sea R el paralelogramo limitado por las rectas $x-2y = 0$, $x-2y = 4$, $3x-y = 1$, $3x - y = 8$. Calcular la integral doble

$$\iint_R \frac{x - 2y}{3x - y}\, dx\, dy.$$

Ejercicio 3.
Sea S la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$, que está por debajo del plano $z = x$, y sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (-xz, x, y^2)$. Hallar el flujo $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, donde $\mathbf{N}$ es la normal exterior al paraboloide, haciéndolo directamente, mediante el teorema de Stokes, y usando el teorema de Gauss.



NOTA: Cada ejercicio se entregará en folios independientes, cada uno encabezado con su nombre y apellidos.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 1 de Julio de 2009

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1.

(a) Dibujar un rectángulo inscrito en el semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$, con uno de sus lados en el eje x.

(b) Calcular las dimensiones y el área del rectángulo del tipo descrito en (a) que tiene área máxima.

Ejercicio 2. Determinar la convergencia o divergencia de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Dada la integral iterada

$$\int_0^1 \int_1^{\sqrt{2-y^2}} \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

(a) Dibujar la región de integración.

(b) Transformar la integral a coordenadas polares.

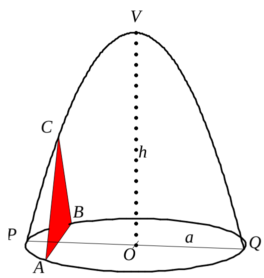
(c) Calcular dicha integral.

Ejercicio 4. Sea S la porción del elipsoide $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, situada encima del plano $z = 0$ y sea $F(x, y, z) = \left(x + y^3, 2y - e^z, -3z - 1\right)$. Calcular el flujo de F a través de S en la dirección exterior al elipsoide.

NOTA: Cada ejercicio se entregará en folios independientes, cada uno encabezado con su nombre y apellidos.

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen de 1 de Septiembre de 2009
Primera parte

Ejercicio 1. En un círculo de radio a se toma un diámetro POQ. Sobre la perpendicular al círculo en el punto O y a una altura h se encuentra el punto V. Consideremos la parábola con vértice en el punto V y que pasa por P y Q. Sea el triángulo de vértices A, B, C, donde A y B están sobre el círculo y C sobre la parábola, todos ellos en un plano perpendicular al diámetro POQ. Calcular el volumen del sólido generado al mover el triángulo ABC desde P hasta Q.



Ejercicio 2. Hallar la serie de Maclaurin para la función

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

determinando su radio de convergencia.

Segunda parte

Ejercicio 3. Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x + y^2,$$

sobre el disco unidad $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\right\}$.

Ejercicio 4. Dada la región plana

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2}, \quad x \ge 1\right\},$$

sea C la curva frontera de R con orientación positiva. Calcular la integral

$$\oint_C -y^2\, dx + x\, dy,$$

directamente y usando el teorema de Green.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 13 de Junio de 2009

Ejercicio 1.

(a) Encontrar y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Hallar el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(0,0,-1)$.

(c) Calcular la distancia mínima del punto $(1,0,1)$ al plano tangente obtenido en (b), usando el método de los multiplicadores de Lagrange.

Solución.

(a) Los puntos críticos de la función se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} f_x &= 3e^y - 3x^2 = 0, \\ f_y &= 3xe^y - 3e^{3y} = 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo la primera ecuación $e^y = x^2$ en la segunda, tenemos que $x^3 = x^6$, luego $x^3\left(x^3 - 1\right) = 0$. Dado que $x^2 = e^y > 0$, el valor $x = 0$ no es solución del sistema. Por tanto $x = 1$, $y = 0$ es el único punto crítico de la función. Para clasificarlo, calculamos $f_{xx} = -6x$, $f_{xy} = 3e^y = f_{yx}$, $f_{yy} = 3xe^y - 9e^{3y}$, por lo que el determinante

$$H(1,0) = \det \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0.$$

Dado que la entrada $a_{11} = -6 < 0$, concluimos que f tiene un máximo local en $(1,0)$.

(b) El punto $(0,0,-1)$ pertenece a la gráfica de f porque $f(0,0) = -1$. Dado que $f_x(0,0) = 3$ y $f_y(0,0) = -3$, la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(0,0,-1)$ es $z + 1 = 3x - 3y$, es decir $3x - 3y - z = 1$.

(c) Aplicaremos el método de los multiplicadores de Lagrange a la función cuadrado de la distancia al punto $(1,0,1)$ definida por

$$h(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2,$$

sujeta a la restricción $g(x,y,z) = 3x - 3y - z = 1$. El sistema $\nabla h = \lambda \nabla g$ es

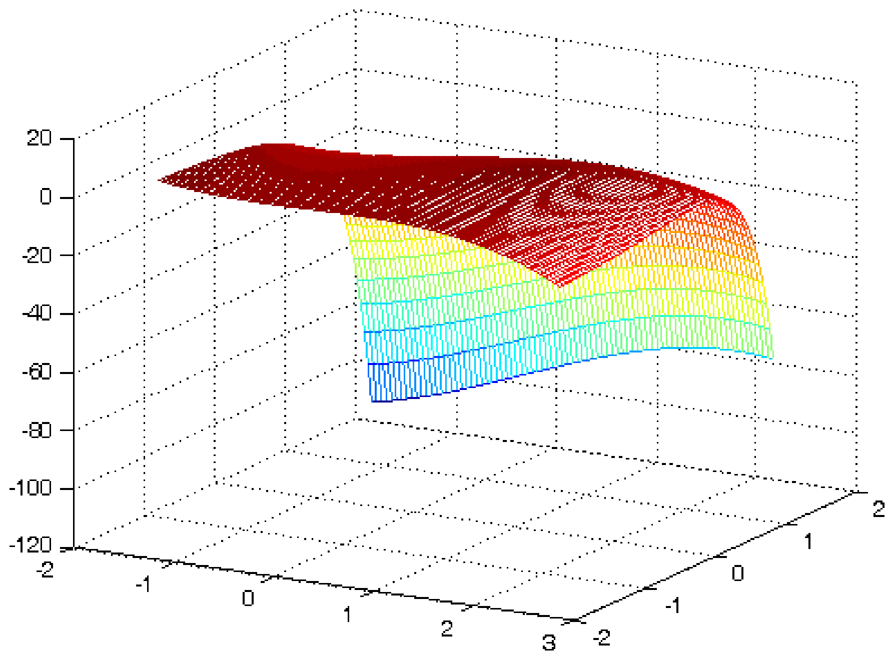
$$\begin{aligned} 2(x-1) &= 3\lambda, \\ 2y &= -3\lambda, \\ 2(z-1) &= -\lambda. \end{aligned}$$

Entonces, $x - 1 = -y = -3\,(z - 1)$, lo que implica $x = 1 - y$, $z = y\,/3 + 1$. Sustituyendo en la restricción $3x - 3y - z = 1$, obtenemos

$$3\,(1 - y) - 3y - \left(\frac{y}{3} + 1\right) = 1 \Longleftrightarrow \frac{19}{3}y = 1 \Longleftrightarrow y = \frac{3}{19},$$

por lo que $x = 16\,/19$ y $z = 20\,/19$. El punto del plano más cercano a $(1, 0, 1)$ es $(16\,/19\,, 3\,/19\,, 20\,/19)$ y la distancia mínima es

$$h^* = \sqrt{\left(\frac{16}{19} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{19}\right)^2 + \left(\frac{20}{19} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{19}.$$



Ejercicio 2.
Sea R el paralelogramo limitado por las rectas $x-2y=0$, $x-2y=4$, $3x-y=1$, $3x-y=8$. Calcular la integral doble

$$\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\,dx\,dy.$$

Solución. Definimos dos nuevas variables $u=x-2y$, $v=3x-y$. Aplicando el teorema del cambio de variable,

$$\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\,dx\,dy = \int_0^4 \int_1^8 \frac{u}{v}\left|\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(u,v)}\right|\,du\,dv.$$

Calculamos el determinante jacobiano del cambio inverso

$$\frac{\partial\,(u,v)}{\partial\,(x,y)} = \det\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{bmatrix} = 5,$$

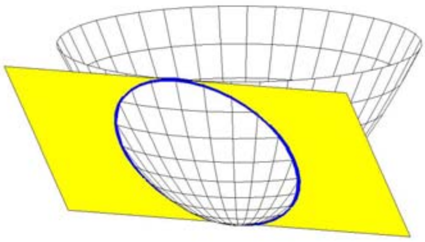
por lo que el determinante jacobiano del cambio de variable es

$$\left|\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(u,v)}\right| = \frac{1}{5}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\,dx\,dy &= \frac{1}{5}\left(\int_0^4 u\,du\right)\left(\int_1^8 \frac{1}{v}\right)\,dv\\ &= \frac{1}{5}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^4 [\ln v]_1^8\\ &= \frac{8}{5}\ln 8\\ &= \frac{24}{5}\ln 2.\end{aligned}$$

Ejercicio 3.
Sea S la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$, que está por debajo del plano $z = x$, y sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (-xz, x, y^2)$. Hallar el flujo $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$, donde $\mathbf{N}$ es la normal exterior al paraboloide, haciéndolo directamente, mediante el teorema de Stokes, y usando el teorema de Gauss.



Solución. En primer lugar, calculamos el rotacional del campo vectorial

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ -xz & x & y^2 \end{vmatrix} = (2y, -x, 1) \,.$$

Parametrizamos la superficie S mediante $S(x, y) = \left(x, y, x^2 + y^2\right)$, donde $x^2 + y^2 \leq x$. El producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1) \,.$$

En el punto $S(0,0) = (0,0,0)$, el vector $S_x \times S_y (0,0) = (0,0,1)$ apunta hacia el interior del paraboloide. Entonces, la normal exterior $\mathbf{N}$ tiene la *dirección opuesta* al vector $S_x \times S_y$.

Calculamos directamente el flujo exterior

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = - \iint_{x^2+y^2 \leq x} (2y, -x, 1) \cdot (-2x, -2y, 1) \; dx \, dy$$
$$= \iint_{x^2+y^2 \leq x} (2xy - 1) \; dx \, dy.$$

Para calcular esta integral doble, usamos coordenadas polares, por lo que el recinto de integración es

$$\left\{ (r, \theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \; 0 \leq r \leq \cos\theta \right\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{x^2+y^2\leq x} (2xy-1)\ dx\,dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\left(2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta-1\right) r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\frac{r^2}{2}\right]_0^{\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^5\theta\ \operatorname{sen}\theta-\cos^2\theta\right)\ d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{\cos^6\theta}{6}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Stokes, el flujo exterior

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

donde C es la curva frontera de S orientada positivamente por la normal exterior al paraboloide $\mathbf{N}$. Observemos que C es la intersección del plano $z=x$ con el cilindro

$$x^2+y^2=x \Longleftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Parametrizamos la curva C mediante

$$r\left(t\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t,\,\frac{1}{2}\operatorname{sen}t,\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t\right),\quad 0\leq t\leq 2\pi.$$

Dado que $r\left(0\right)=\left(1,0,1\right)$ y $r\left(\pi/2\right)=\left(1/2\,,1/2\,,1/2\right)$ la curva C tiene la orientación opuesta a la inducida por $\mathbf{N}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= -\int_0^{2\pi}\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(t\right)\right)\cdot\mathbf{r}'\left(t\right)\ dt \\
&= -\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{4}\left(1+\cos t\right)^2,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t,\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 t\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}t,\frac{1}{2}\cos t,-\frac{1}{2}\operatorname{sen}t\right)\ dt \\
&= -\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{8}\left(1+\cos t\right)^2\operatorname{sen}t+\frac{1}{4}\left(1+\cos t\right)\cos t-\frac{1}{8}\operatorname{sen}^3 t\right)\ dt \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = -\frac{1}{4}\left[\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen}2t}{4}\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Si consideramos el sólido Q cuyas fronteras son S y la superficie T, definida por $x^2 + y^2 \leq x$, $z = x$, el teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint_{S \cup T} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Entonces el flujo exterior verifica

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = -\iint_T \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

Si definimos la parametrización $T(x, y) = (x, y, x)$ donde $x^2 + y^2 \leq x$, el producto vectorial fundamental

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= -\iint_{x^2+y^2 \leq x} (2y, -x, 1) \cdot (-1, 0, 1) \, dx \, dy \\
&= -\iint_{x^2+y^2 \leq x} (1 - 2y) \, dx \, dy \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} (1 - 2r \operatorname{sen}\theta) \, r \, dr \, d\theta \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{2}{3} r^3 \operatorname{sen}\theta \right]_0^{\cos\theta} d\theta \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2\theta}{2} - \frac{2}{3} \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta \right) d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} + \frac{4}{3} \frac{\cos^4\theta}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

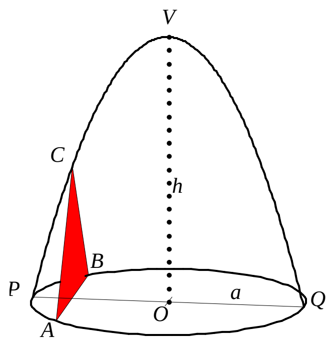
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 1 de Septiembre de 2009

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. En un círculo de radio a se toma un diámetro POQ. Sobre la perpendicular al círculo en el punto O y a una altura h se encuentra el punto V. Consideremos la parábola con vértice en el punto V y que pasa por P y Q. Sea el triángulo de vértices A, B, C, donde A y B están sobre el círculo y C sobre la parábola, todos ellos en un plano perpendicular al diámetro POQ. Calcular el volumen del sólido generado al mover el triángulo ABC desde P hasta Q.



Solución. Elegimos un sistema cartesiano de coordenadas con centro en el punto O, eje x que contiene el diámetro POQ, eje y en el plano que contiene el círculo de radio a y eje z que contiene el segmento OV. En primer lugar, obtenemos la ecuación de la parábola PVQ. A partir de la ecuación general de una parábola $y(x) = px^2 + qx + r$, su vértice verifica $y(0) = r = h$ y además $y'(0) = q = 0$. Entonces $y(x) = px^2 + h$. Dado que la parábola pasa por los puntos $P = (-a, 0)$ y $Q = (a, 0)$, tenemos que

$$y(\pm a) = pa^2 + h = 0 \Longrightarrow p = -\frac{h}{a^2}.$$

Por tanto, la ecuación de la parábola, que coincide con la altura del triángulo ABC, es

$$y(x) = -\frac{h}{a^2}x^2 + h, \quad -a \leq x \leq a.$$

Observemos que la base del triángulo ABC es la distancia entre los puntos del círculo $x^2 + y^2 = 1$, cuyas coordenadas son $\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$ y $\left(x, -\sqrt{a^2 - x^2}\right)$. Es decir, la base es $2\sqrt{a^2 - x^2}$. En consecuencia, el área de la sección triangular es

$$A\left(x\right) = \sqrt{a^2 - x^2}\left(h - \frac{h}{a^2}x^2\right) = \frac{h}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}, \quad -a \leq x \leq a.$$

El volumen del sólido generado al mover el triángulo ABC, desde P hasta Q, se obtiene integrando el área de las secciones triangulares

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} A\left(x\right)\, dx = \frac{h}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2 - x^2\right)^{3/2} dx = \frac{2h}{a^2}\int_{0}^{a}\left(a^2 - x^2\right)^{3/2} dx \\ &= \frac{2h}{a^2}\int_{0}^{\pi/2} a^4 \cos^4\theta\, d\theta = 2ha^2 \int_{0}^{\pi/2}\cos^4\theta\, d\theta, \end{aligned}$$

usando el cambio de variable $x = a \operatorname{sen}\theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Para encontrar una primitiva, tenemos que

$$\begin{aligned} \cos^4\theta &= \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta\right). \end{aligned}$$

Así concluimos que el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \frac{2ha^2}{8}\int_{0}^{\pi/2}\left(3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta\right) d\theta \\ &= \frac{ha^2}{4}\left[3\theta + 2\operatorname{sen} 2\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{ha^2}{4}\frac{3\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi h a^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Hallar la serie de Maclaurin para la función

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

determinando su radio de convergencia.

Solución. Derivando la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

obtenemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad -1 < x < 1.$$

Entonces la serie de Maclaurin es

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad -1 < x < 1.$$

El radio de convergencia de la serie de potencias es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

por lo que la serie es absolutamente convergente en el intervalo $(-1, 1)$. En los extremos $x = -1$ y $x = 1$, las series numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \ \text{ y } \ \sum_{n=1}^{\infty} n$$

son divergentes porque no cumplen la condición necesaria de convergencia.

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen de 1 de Septiembre de 2009
SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x + y^2,$$

sobre el disco unidad $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Solución. En primer lugar, determinamos los puntos del interior del conjunto D, es decir $x^2 + y^2 < 1$, que verifican

$$\nabla f(x,y) = \left(x^2 - \frac{1}{4}, 2y\right) = (0,0),$$

obteniendo los puntos críticos $P_1 = (-1/2, 0)$ y $P_2 = (1/2, 0)$, que pertenecen al interior de D. Para analizarlos, calculamos la matriz hessiana

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En los puntos P_1 y P_2, dicha matriz es

$$H(-1/2, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H(1/2, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En el punto P_1 el determinante es -2, luego f tiene un punto de silla y en dicho punto no se alcanzan los valores extremos de f. En el punto P_2 el determinante es 2 y $f_{xx} = 1 > 0$, por lo que f tiene un mínimo local en P_2.

Para analizar la función en el círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$, aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange, resolviendo el sistema dado por

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

y la restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$. Las dos primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{4} &= 2\lambda x, \\ 2y &= 2\lambda y, \end{aligned}$$

La segunda ecuación implica que $(1-\lambda)y = 0$ por lo que $\lambda = 1$ o bien $y = 0$. Si $\lambda = 1$, usando la primera ecuación, tenemos que $x^2 - 2x - 1/4 = 0$, luego

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+1}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Usando la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, tenemos

$$x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow y^2 = 1 - x^2 = 1 - \left(1 - \sqrt{5} + \frac{5}{4}\right) = \sqrt{5} - \frac{5}{4} > 0,$$
$$x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow y^2 = 1 - x^2 = 1 - \left(1 + \sqrt{5} + \frac{5}{4}\right) = -\sqrt{5} - \frac{5}{4} < 0.$$

Dado que la segunda desigualdad $y^2 < 0$ es imposible, el único valor de x es el primero. Así obtenemos los puntos

$$P_3 = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\sqrt{5} - \frac{5}{4}}\right) \quad \text{y} \quad P_4 = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\sqrt{5} - \frac{5}{4}}\right).$$

Si $y = 0$ entonces la ecuación de la restricción implica que $x^2 = 1$, lo que proporciona dos nuevos puntos

$$P_5 = (1, 0) \;\; \text{y} \;\; P_6 = (-1, 0)\,.$$

Los valores de la función f en dichos puntos son

$$f\left(P_2\right) = -\frac{1}{12}, \;\; f\left(P_3\right) = f\left(P_4\right) \approx 1.01503, \;\; f\left(P_5\right) = \frac{1}{12}, \;\; f\left(P_6\right) = -\frac{1}{12}$$

luego el máximo absoluto de f se alcanza en P_3 y P_4, mientras que el mínimo absoluto de f se alcanza en P_2 y P_6.

Ejercicio 4. Dada la región plana

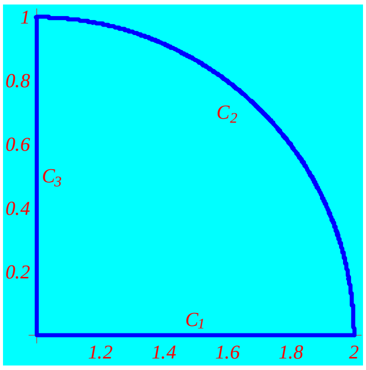
$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}, \ \ x \geq 1 \right\},$$

sea C la curva frontera de R con orientación positiva. Calcular la integral

$$\oint_C -y^2\, dx + x\, dy,$$

directamente y usando el teorema de Green.

Solución.



La curva frontera de R con orientación positiva verifica $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde C_1 se parametriza con $r_1(t) = (t, 0)$, $1 \leq t \leq 2$. Observemos que C_2 es el trozo de la circunferencia

$$y^2 = 2x - x^2 \Longleftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

tal que $x \geq 1$, $y \geq 0$. Entonces $r_2(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$, es una parametrización de C_2. Finalmente, parametrizamos C_3 mediante $r_3(t) = (1, 1-t)$, $0 \leq t \leq 1$. Calculamos las integrales de línea

$$\int_{C_1} -y^2\, dx + x\, dy = \int_1^2 0\, dt = 0,$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} -y^2\, dx + x\, dy &= \int_0^{\pi/2} \left[-\operatorname{sen}^2 t\, (-\operatorname{sen} t) + (1 + \cos t) \cos t \right] dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}^3 t + \cos^2 t + \cos t \right) dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\left(1 - \cos^2 t\right) \operatorname{sen} t + \frac{1 + \cos 2t}{2} + \cos t \right] dt \\
&= \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \operatorname{sen} t \right]_0^{\pi/2} \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} + 1 = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

$$\int_{C_3} -y^2\,dx + x\,dy = \int_0^1 -dt = -1.$$

En consecuencia, el valor de la integral es

$$\oint_C -y^2\,dx + x\,dy = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

El teorema de Green asegura que

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_R \left(Q_x - P_y\right)\,dx\,dy.$$

La región $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\;\; 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\right\}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\oint_C -y^2\,dx + x\,dy &= \iint\limits_R \left(1 + 2y\right)\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_R dx\,dy + \iint\limits_R 2y\,dx\,dy \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} 2y\,dy\right)\,dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_1^2 \left[y^2\right]_0^{\sqrt{2x-x^2}}\,dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_1^2 \left(2x - x^2\right)\,dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\
&= \frac{\pi}{4} + \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 5 de Julio de 2010

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Sea L la recta tangente a la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto (a, b) tal que $\ln a > 1$. Sea $(0, c)$ el punto en el que L corta al eje y.

(i) Calcular la distancia ente los puntos $(0, b)$ y $(0, c)$.

(ii) Hallar el área de la región acotada por el eje x, el eje y, la recta L y la gráfica de $y = \ln x$.

Solución. (i) La ecuación de la recta L es

$$y - b = \frac{1}{a}(x - a).$$

La coordenada c del punto en el que L corta al eje y verifica

$$c - b = \frac{1}{a}(0 - a),$$

por lo que $c = b - 1$. Entonces, la distancia ente los puntos $(0, b)$ y $(0, c)$ es $b - c = 1$.

(ii) El área de la región acotada por el eje x, el eje y, la recta $y = b$ y la gráfica de $x = e^y$ menos el área del triángulo con vértices (a, b), $(0, b)$ y $(0, c)$, es el área pedida. Entonces

$$A = \int_0^b e^y \, dy - \frac{a}{2} = e^b - 1 - \frac{a}{2} = a - 1 - \frac{a}{2} = \frac{a-2}{2},$$

porque $b = \ln a \Leftrightarrow e^b = a$.

Ejercicio 2.

(i) Derivación e integración de series de potencias.

(ii) Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\, 5^n}.$$

Solución. Integrando la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1,$$

obtenemos

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

Entonces, la suma de la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\, 5^n} = \ln\left(1 + \frac{1}{5}\right) = \ln\left(\frac{6}{5}\right).$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 5 de Julio de 2010

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Calcular los extremos absolutos de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z,$$

sobre el conjunto $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \;\; y + z = 1\}$.

Solución. Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, calculamos los extremos de f sujetos a la restricción $g(x, y, z) = y + z - 1 = 0$. Resolvemos el sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$, dado por

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 0, \\ 2y + 1 &= \lambda, \\ 2z + 1 &= \lambda. \end{aligned}$$

La solución es $x = -1/2$, $y = z$, por lo que la restricción $y + z = 1$ implica $y = z = 1/2$. Dado que el punto $P_1 = (-1/2, 1/2, 1/2)$ satisface la desigualdad $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, hemos obtenido un candidato a extremo.

A continuación, obtenemos los extremos de f con las restricciones

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= y + z - 1 = 0, \\ h(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Para ello resolvemos el sistema $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, dado por

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 2\mu x, \\ 2y + 1 &= \lambda + 2\mu y, \\ 2z + 1 &= \lambda + 2\mu z. \end{aligned}$$

Restando la tercera ecuación de la segunda

$$y - z = \mu(y - z) \Longleftrightarrow (y - z)(1 - \mu) = 0 \Longleftrightarrow \mu = 1 \text{ o bien } y = z.$$

Si $\mu = 1$ entonces la primera ecuación es $2x + 1 = 2x$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $y = z$, lo que implica, usando $y + z = 1$, que $y = z = 1/2$. La segunda restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ implica que $x^2 = 1 - 1/4 - 1/4 = 1/2$. En consecuencia, obtenemos los puntos $P_2 = \left(-1/\sqrt{2}, 1/2, 1/2\right)$ y $P_3 = \left(1/\sqrt{2}, 1/2, 1/2\right)$.

Finalmente, evaluamos los valores de f en los tres puntos obtenidos

$$
\begin{aligned}
f(P_1) &= f(-1/2\,,1/2\,,1/2) = 3/4 + 1/2 = 5/4 = 1.25,\\
f(P_2) &= f\left(-1\Big/\sqrt{2}\,,1/2\,,1/2\right) = 2 - 1\Big/\sqrt{2} \approx 1.29289,\\
f(P_3) &= f\left(1\Big/\sqrt{2}\,,1/2\,,1/2\right) = 2 + 1\Big/\sqrt{2} \approx 2.70710.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, el máximo absoluto se alcanza en P_3 y el mínimo absoluto en P_1.

Ejercicio 4. Sea S la porción del paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ que se encuentra en el interior del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dado el campo vectorial $F(x, y, z) = (y, 2x, zx)$, calcular el flujo exterior del campo $\operatorname{rot} F$ a través de S, directamente, usando el teorema de Stokes y aplicando el teorema de Gauss.

Solución. La intersección del paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ con el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ verifica $z = 2 - z^2$ con $z \geq 0$. La solución de la ecuación $z^2 + z - 2 = 0$ es

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}.$$

Por tanto, la intersección es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, contenida en el plano $z = 1$. Como los puntos de la superficie S están en el interior del cono, sus coordenadas verifican $1 \leq z = 2 - x^2 - y^2 \leq 2$, lo que implica $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$. Entonces, elegimos la parametrización

$$S(x, y) = \left(x, y, 2 - x^2 - y^2\right) \quad \text{donde} \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

El producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1).$$

En el punto $S(0, 0) = (0, 0, 2)$, el vector $S_x \times S_y(0, 0) = (0, 0, 1)$ apunta hacia el exterior del paraboloide. A continuación, calculamos el rotacional del campo F,

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ y & 2x & zx \end{vmatrix} = (0, -z, 1).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(S(x, y)) \cdot (S_x \times S_y) &= \left(0, x^2 + y^2 - 2, 1\right) \cdot (2x, 2y, 1) \\ &= \left(x^2 + y^2 - 2\right) 2y + 1. \end{aligned}$$

El flujo exterior del campo $\operatorname{rot} F$ a través de S es

$$\iint\limits_{S} \operatorname{rot} F \cdot N \, dS = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left[\left(x^2+y^2-2\right)2y+1\right] \, dx\, dy$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\left(r^2-2\right)2r \operatorname{sen}\theta + 1\right] r \, d\theta \, dr$$
$$= \int_0^1 \left[2r^2\left(2-r^2\right)\cos\theta + r\theta\right]_0^{2\pi} \, dr$$
$$= 2\pi \int_0^1 r\, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi.$$

El teorema de Stokes asegura que

$$\iint\limits_{S} \operatorname{rot} F \cdot N \, dS = \oint_C F \cdot dr,$$

donde C es la curva frontera de S, es decir, la circunferencia $x^2+y^2=1$, contenida en el plano $z=1$. Parametrizamos C mediante

$$c(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1) \quad \text{donde} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Observemos que la orientación inducida por la normal exterior al paraboloide coincide con la orientación de C. Calculamos la integral de línea

$$\int_0^{2\pi} F\left[c(\theta)\right] \cdot c'(\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, \cos\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos 2\theta + \cos^2\theta\right) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos 2\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+3\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{3\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Si consideramos el sólido Q cuyas fronteras son S y la superficie T, definida por $x^2+y^2 \leq 1$, $z=1$, el teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint\limits_{S\cup T} \operatorname{rot} F \cdot N \, dS = \iiint\limits_{Q} \operatorname{div} \operatorname{rot} F \, dx\, dy\, dz = 0.$$

Entonces el flujo exterior de $\operatorname{rot} F$ a través de S verifica

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS = - \iint_T \operatorname{rot} F \cdot N \, dS.$$

Si definimos la parametrización $T(x, y) = (x, y, 1)$ donde $x^2 + y^2 \leq 1$, el vector normal con orientación exterior es $N = (0, 0, -1)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (0, -1, 1) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy = \pi. \end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 4 de Febrero de 2010

Ejercicio 1. Se considera un circuito de carreras compuesto por dos tramos rectos paralelos de la misma longitud, unidos en ambos extremos por sendas semicircunferencias. Si la longitud total del circuito es L, determinar sus dimensiones de modo que el área del rectángulo central sea máxima. ¿Qué ocurre si se desea maximizar el área total?

Solución. Sea x la longitud de cada tramo recto y sea d el diámetro de la semicircunferencia. Entonces, la longitud total del circuito es $L = 2x + \pi d$, lo que implica que

$$d = \frac{L - 2x}{\pi}.$$

El área del rectángulo central es

$$A(x) = dx = \frac{Lx - 2x^2}{\pi}, \quad x \in (0, L/2).$$

Los puntos críticos de esta función son la soluciones de $A'(x) = 0$ en el intervalo $(0, L/2)$. Resolvemos la ecuación

$$A'(x) = \frac{L - 4x}{\pi} = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{4}.$$

Observemos que $A'(x) > 0$ si $x < L/4$ y que $A'(x) < 0$ si $x > L/4$, luego la función es creciente en el intervalo $(0, L/4)$ y decreciente en el intervalo $(L/4, L/2)$. Por tanto, con las dimensiones $x = L/4$ y $d = L/2\pi$ el área del rectángulo central es máxima.

El área total de la región cuya frontera es el circuito viene dada por

$$\begin{aligned} T(x) &= dx + \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{Lx - 2x^2}{\pi} + \pi\left(\frac{L - 2x}{2\pi}\right)^2 \\ &= \frac{Lx - 2x^2}{\pi} + \frac{L^2 - 4Lx + 4x^2}{4\pi} = \frac{L^2 - 4x^2}{4\pi}, \end{aligned}$$

donde $x \in (0, L/2)$. Calculamos

$$T'(x) = -\frac{8x}{4\pi} = -\frac{2x}{\pi} < 0,$$

para todo $x > 0$. Entonces, el área total es una función decreciente en el intervalo abierto $(0, L/2)$ por lo que no existen máximos ni mínimos en dicho intervalo.

Ejercicio 2. Hallar el valor real a que hace convergente la integral impropia

$$\int_0^\infty \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{a}{2x+1} \right) dx,$$

y calcular el valor de la integral.

Solución. El integrando verifica

$$\frac{2x}{x^2+1} - \frac{a}{2x+1} = \frac{(4-a)\,x^2+2x-a}{(x^2+1)\,(2x+1)} = \frac{2x-4}{(x^2+1)\,(2x+1)}$$

para el valor $a=4$. Descomponemos la integral impropia para $a=4$ mediante

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{2x+1} \right) dx = &\int_0^1 \frac{2x-4}{(x^2+1)\,(2x+1)}\,dx \\ &+ \int_1^\infty \frac{2x-4}{(x^2+1)\,(2x+1)}\,dx,\end{aligned}$$

El criterio de comparación por límites (cuando $x \to \infty$) implica que la integral impropia tiene el mismo carácter que la integral convergente

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Calculamos el valor de la integral

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{2x+1} \right) dx &= \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left(x^2+1\right) - 2\ln\left(2x+1\right) \right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{b^2+1}{(2b+1)^2} \right) \\ &= \ln\left(\lim_{b\to\infty} \frac{b^2+1}{(2b+1)^2} \right) \\ &= \ln\frac{1}{4} \\ &= -2\ln 2.\end{aligned}$$

Ejercicio 3.
(a) Obtener la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(1-x)^2},$$

así como su dominio de convergencia.
(b) Dada la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) - \frac{1}{2^n} \right] \frac{1}{5^n},$$

estudiar su carácter y calcular su suma.

Solución. (a) El desarrollo en serie de Maclaurin de la función

$$\frac{2}{x-2} = \frac{-1}{1-x/2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n, \quad x \in (-2,2).$$

Observemos que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n,$$

donde $x \in (-1,1)$. Sumando los desarrollos obtenidos, tenemos que

$$\frac{2}{x-2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) - \frac{1}{2^n} \right] x^n, \quad x \in (-1,1).$$

(b) La serie numérica es el valor de la serie de Maclaurin en $x = 1/5 \in (-1,1)$, por lo que es convergente y su suma es

$$\frac{2}{1/5-2} + \frac{1}{(1-1/5)^2} = \frac{65}{144} \approx 0.4513889$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 16 de Junio de 2010

Ejercicio 1.
Hallar los puntos del cono $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto $(4, 2, 0)$.

Solución. Aplicaremos el método de los multiplicadores de Lagrange a la función dada por el cuadrado de la distancia al punto $(4, 2, 0)$, es decir,

$$f(x, y, z) = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + z^2,$$

sujeta a la restricción $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

El sistema de ecuaciones $\nabla f = \lambda \nabla g$ es

$$\begin{aligned} 2(x - 4) &= 2\lambda x, \\ 2(y - 2) &= 2\lambda y, \\ 2z &= -2\lambda z. \end{aligned}$$

La tercera ecuación del sistema es $(1 + \lambda) z = 0$, lo que implica que $z = 0$, o bien $\lambda = -1$. Si $z = 0$, sustituyendo en la restricción $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, obtenemos $x^2 + y^2 = 0$, lo que implica $x = y = 0$, que contradice las dos primeras ecuaciones.

Por tanto, $\lambda = -1$. Para este valor, las dos primeras ecuaciones son $x - 4 = -x$, $y - 2 = -y$, cuya única solución es $x = 2$, $y = 1$. Usando la restricción, obtenemos $z^2 = x^2 + y^2 = 5$.

Entonces, los puntos del cono más cercanos al punto $(4, 2, 0)$ son $\left(2, 1, \sqrt{5}\right)$ y $\left(2, 1, -\sqrt{5}\right)$.

Ejercicio 2.
Sea V el sólido definido mediante las desigualdades

$$x^2 + y^2 \leq z^2, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

Calcular la integral triple

$$\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2} \, dx\, dy\, dz.$$

Solución. Usando coordenadas esféricas, las desigualdades que definen el sólido son $0 \leq \operatorname{sen}\phi \leq \cos\phi$, $0 \leq \rho\cos\phi \leq 2$. Entonces

$$V = \left\{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ \ 0 \leq \phi \leq \pi/4\,, \ \ 0 \leq \rho \leq 2/\cos\phi\right\}.$$

Cambiando a coordenadas esféricas, la integral triple verifica

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2} \, dx\, dy\, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2/\cos\phi} \rho^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{2/\cos\phi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi\, d\theta \\
&= \frac{2^5}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^6\phi} \, d\phi\, d\theta \\
&= \frac{2^5}{3} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{5\cos^5\phi}\right]_0^{\pi/4} d\theta \\
&= \frac{2^5}{15} \int_0^{2\pi} \left[\left(\sqrt{2}\right)^5 - 1\right]_0^{\pi/4} d\theta \\
&= \frac{2^5}{15} \left(4\sqrt{2} - 1\right) 2\pi \\
&= \frac{64\left(4\sqrt{2} - 1\right)}{15} \pi.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.
Calcular la integral de línea

$$\oint_C e^{x^2}\,dx + (x+z)\operatorname{sen} y^3\,dy + \left(y^2 - x^2 + 2yz\right)\,dz,$$

siendo C la curva obtenida por la intersección del plano $x+y+z=3$ con los planos coordenados, indicando la orientación de C elegida.

Solución. El teorema de Stokes asegura que $\oint_C \mathbf{F}.dr = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, donde S es el triángulo contenido en el plano $x+y+z=3$ cuya frontera es la curva C. Elegimos la orientación positiva inducida por el vector normal de la ecuación implícita del plano, es decir $\mathbf{N}=(1,1,1)$. Calculamos el rotacional del campo vectorial

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ e^{x^2} & (x+z)\operatorname{sen} y^3 & y^2 - x^2 + 2yz \end{vmatrix} \\ &= \left(2y + 2z - \operatorname{sen} y^3, 2x, \operatorname{sen} y^3\right).\end{aligned}$$

La superficie S se define mediante $x+y+z=3$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$. Usando la parametrización $S\,(x,y)=(x,y,3-x-y)$, donde $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 3$, el producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1).$$

Observemos que el vector normal elegido coincide con $S_x \times S_y$. Calculamos el flujo

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iint_T \left(6 - 2x - \operatorname{sen} y^3, 2x, \operatorname{sen} y^3\right)\cdot(1,1,1)\;dx\,dy \\ &= 6\iint_T dx\,dy = 6\ \text{área}\,(T),\end{aligned}$$

donde $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ x+y\leq 3\right\}$ es un triángulo con base 3 y altura 3. Entonces, la integral de línea

$$\oint_C \mathbf{F}.\,dr = 6\times\frac{9}{2} = 27.$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segunda Convocatoria, 8 de Septiembre de 2010

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Un operario taladra un orificio con un radio r a través del centro de una esfera de metal de radio R.

(a) Encontrar el volumen del anillo esférico resultante.

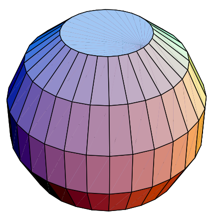
(b) Si $R = 5$, calcular el valor de r tal que el volumen del anillo esférico sea la mitad del volumen de la esfera.

Solución:

(a) Usando la simetría del anillo esférico, podemos generar la mitad de dicho anillo girando alrededor del eje y la región comprendida entre el segmento $x = r$, la porción de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ situada en el primer cuadrante y el eje x.

Mediante el método de las capas, el volumen del anillo es

$$V = 4\pi \int_r^R x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 4\pi \left[-\frac{1}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{3/2} \right]_r^R = \frac{4\pi}{3}\left(R^2 - r^2\right)^{3/2}.$$



(b) Si $R = 5$, la mitad del volumen de la esfera es $2\pi 5^3/3$. Entonces

$$\frac{2\pi 5^3}{3} = \frac{4\pi}{3}\left(5^2 - r^2\right)^{3/2} \Leftrightarrow \left(\frac{5^3}{2}\right)^{2/3} = 5^2 - r^2 \Leftrightarrow r = 5\sqrt{1 - \frac{1}{2^{2/3}}}.$$

Ejercicio 2. Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n}.$$

Determinar su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su función suma.

Solución. El radio de convergencia de la serie es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^n}{n}}{\dfrac{3^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3},$$

La serie converge absolutamente en el intervalo abierto $|x-2| < 1/3$. Estudiamos la convergencia en los puntos terminales $x-2 = -1/3$ y $x-2 = 1/3$. En el primero, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

es convergente por el criterio de Leibnitz. En el segundo punto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente por el criterio integral. En consecuencia, la serie es convergente en el intervalo $-1/3 \le x-2 < 1/3 \Longleftrightarrow 5/3 \le x < 7/3$.

Para sumar la serie, definimos $z = 3(x-2)$. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

para $z \in [-1, 1)$. La derivada de esta serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad -1 < z < 1.$$

Integrando ambos términos, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z), \quad -1 < z < 1,$$

lo que implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n} = -\ln(1-3(x-2)) = -\ln(7-3x), \quad \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}.$$

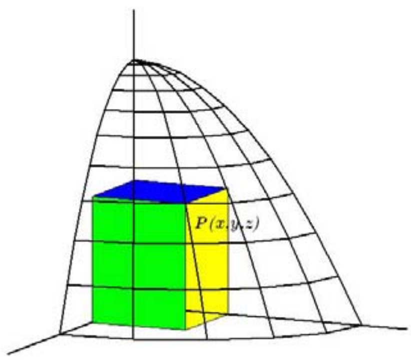
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segunda Convocatoria, 8 de Septiembre de 2010

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Una caja rectangular se coloca en el primer octante con un vértice en el origen y las tres caras adyacentes en los planos coordenados como muestra la figura. Además, el vértice $P = (x, y, z)$ con coordenadas $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, pertenece al paraboloide de ecuación $x^2+y^2+z = 1$. Hallar el punto P que maximiza el volumen de la caja.



Solución. Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange al volumen $V(x, y, z) = xyz$, resolviendo el sistema dado por la ecuación $\nabla V(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$, donde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} yz &= 2\lambda x, \\ xz &= 2\lambda y, \\ xy &= \lambda. \end{aligned}$$

La tercera ecuación implica que $yz = 2x^2y$, $xz = 2xy^2$. Usando que $y > 0$, $x > 0$, obtenemos $z = 2x^2 = 2y^2$.

Entonces $g(x, y, z) = z/2 + z/2 + z = 1$, por lo que $z = 1/2$. Dado que $2x^2 = 1/2$, $2y^2 = 1/2$, donde $x > 0$, $y > 0$, el punto P que maximiza el volumen de la caja es $P = (1/2, 1/2, 1/2)$ y el volumen máximo es $1/8$.

Ejercicio 4. Consideremos la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0,$$

orientada según la normal exterior a la esfera y el campo vectorial $F(x,y,z) = (-y, yz^2, x^2 z)$. Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS,$$

directamente, aplicando el teorema de Stokes y usando el teorema de Gauss.

Solución. En primer lugar, calculamos el rotacional del campo vectorial

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ -y & yz^2 & x^2 z \end{vmatrix} = (-2yz, -2xz, 1).$$

Dado que $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, parametrizamos la superficie S mediante

$$S(x,y) = \left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right), \quad (x,y) \in D,$$

donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. El producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1\right),$$

y tiene la orientación exterior a la esfera porque $S_x \times S_y(0,0) = (0,0,1)$. Calculamos directamente

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS &= \iint_D \operatorname{rot} F(S(x,y)) \cdot S_x \times S_y \, dx\, dy = \iint_D (1 - 4xy) \, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(1 - 4r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\right) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - r^4 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - 8 \operatorname{sen} 2\theta) \, d\theta = [2\theta + 4\cos 2\theta]_0^{2\pi} = 4\pi, \end{aligned}$$

usando el cambio de variables a coordenadas polares.

El teorema de Stokes asegura que

$$\iint\limits_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS = \oint\limits_C F \cdot dr,$$

donde la curva C, frontera de S, viene dada por $x^2+y^2=4, \quad z=0$. Una parametrización de C con la orientación inducida por la normal exterior a la esfera es $r(t)=(2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 0)$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Calculamos

$$\begin{aligned}
\oint\limits_C F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-2\operatorname{sen} t, 0, 0) \cdot (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)\ dt = 4\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \, dt \\
&= 4\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = 2\left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\pi.
\end{aligned}$$

Para usar el teorema de Gauss, consideramos la superficie S^* definida por $x^2+y^2 \leq 4, \quad z=0$. Entonces, la superficie $S \cup S^*$ es la frontera de la semiesfera V, donde la orientación de S^* viene dada por la normal exterior a la semiesfera. El teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint\limits_{S\cup S^*} \operatorname{rot} F \cdot N \, dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}(\operatorname{rot} F)\ dx\, dy\, dz = 0,$$

porque $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)(x,y,z)=0$. En consecuencia,

$$\iint\limits_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS = -\iint\limits_{S^*} \operatorname{rot} F \cdot N \, dS.$$

Parametrizamos la superficie $S^*(x,y)=(x,y,0)$, donde $x^2+y^2 \leq 4$. El producto vectorial fundamental es

$$S_x^* \times S_y^* = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1).$$

Dado que está orientado hacia el interior de V, debemos integrar

$$-\operatorname{rot} F(S^*(x,y)) \cdot S_x^* \times S_y^* = -(0,0,1)\cdot(0,0,1) = -1.$$

El flujo exterior, a través de S^*, del rotacional del campo F es

$$\iint\limits_{S^*} \operatorname{rot} F \cdot N \, dS = -\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} dx\, dy = -4\pi,$$

lo que implica el resultado pedido.